Παρασκευή 22/02/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις I 1η ώρα + 2η ώρα
(Εισαγωγή στη Μιγαδική Ανάλυση)

Αντικείμενο: Μελέτη συναρτήσεων από το σύνολο των μιγαδικών αριθμών σε αυ-
από αναλυτική άποψη (δηλ. συνέχεια και κυρίως μιγαδική διαφ.)

Βιβλιογραφία: α) Μερκουράκης, Χατζηαφράτης, Εισαγωγή στη Μιγαδική Ανάλυση, 2005
(Θεωρία πλούσια, δομή μέτρια, ασκήσεις/εφαρμογές λίγες)
β) Κραβαρίτης, Εφαρμοσμένη Μιγαδική Ανάλυση
(Επαρκής Θεωρία, πολλές ασκήσεις)
γ) Καρακώστας, Εισαγωγή στη Μιγαδική Ανάλυση
(Περιέχει την αναγκαία θεωρία, τονίζει τις ιδιότητες Μιγαδικών Αριθμών)

Σημειώσεις (ατελής) στη σελίδα του διδάσκοντα (θα εμπλουτιστούν ως προς μέρη της θεωρίας που λείπουν) [σκοπός, να περιέχουν όλη την απαραίτητη θεωρία με αποδείξεις ή παραπομπές σύνθεσης ως προς τοπολογία και συνέχεια αλλά και διαφορισιμότητα με σημειώσεις «Διανυσματικής Ανάλυσης» (Α.Λ. III & IV) περιέχουν κάποιες, όχι πολλές, ασκήσεις)

Προτεινόμενη Διεθνής Βιβλιογραφία: Remmert, Theory of Complex Functions

Κεφάλαιο 1: Μιγαδικοί Αριθμοί

Προαπαιτούμενα (προφανώς όχι τα πάντα από το αντίστοιχο μάθημα)
1) Ο άξονας των πραγματικών (το σώμα των πραγμ. αριθμών $\mathbb{R}$)
2) Ιδιότητες πραγμ. συναρτ. πραγμ. μεταβλ. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (π.χ. εκθετική, λογαριθμική, τριγωνομ.)
3) Διαφορισιμότητα διανυσματικών πεδίων από το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^2$.

1.1 Ορισμός: Αλγεβρική δομή. Βασικές έννοιες του σώματος των μιγαδικών αριθμών

Κίνητρο: Η εξίσωση $\boxed{x^2+1=0}$ δεν μπορεί να επιλυθεί στο $\mathbb{R}$.
Για την επίλυσή της απαιτείται ένας αριθμός (ή περισσότεροι) ο οποίος θα ονομάζεται i με την ιδιότητα $\boxed{i^2=-1}$

Απάντηση: (βλ. Άλγεβρα). Αποδεικνύεται ότι η ελάχιστη (και μέχρι ισομορφίου μοναδική) επέκταση του σώματος $(\mathbb{R},+,\cdot)$ των πραγμ., ένα σώμα που θα περιέχει ένα i με την ιδιότητα $i^2=-1$ είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης δύο με διανύσματα βάσεις που θα αντιστοιχούν στην πραγματική μονάδα $1\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ και τη φανταστική μονάδα $i\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$
Αυτή την ελαχ. επέκταση την ονομάζουμε σώμα μιγαδικών αριθμών και το συμβολίζουμε:

$(\mathbb{C},+,\cdot)$

Συνεπώς: 1) Αντιστοιχούμε 1-1 και επί τη μεταθετική ομάδα $(\mathbb{C},+)$ με την $(\mathbb{R}^2,+)$ όπου (α) το ουδέτερο στοιχείο $0\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ αντιστοιχεί στο $(0,0)\in\mathbb{R}^2$

(β) η πραγμ. μονάδα $1\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ αντιστοιχεί στο $(1,0)\in\mathbb{R}^2$

(γ) η φαντ. μονάδα $i\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ αντιστοιχεί στο $(0,1)\in\mathbb{R}^2$

και γενικότερα, (δ) κάθε πραγμ. αριθμός $x\in\mathbb{R}$ αντιστοιχεί στο $(x,0)\in\mathbb{R}^2$

(ε) κάθε μιγαδικός αριθμός $z\in\mathbb{C}$ αντιστοιχεί, μοναδικά, σε ένα διάνυσμα $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ μέσω της αλγεβρικής παράστασης (ή μορφής)

$$\underset{\in\mathbb{C}}{z} = \underset{\in\mathbb{R}}{x} + \underset{\in\mathbb{R}}{y}\,i = x(1,0)+y(0,1)=(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

[Από εδώ και κάτω (και στο εξής) όταν θα γράφουμε $z=x+yi=x+iy$ θα εννοούμε (εκτός αν αναφέρεται κάτι διαφορετικό) ότι $x,y\in\mathbb{R}$]

(στ) η πρόσθεση $(+):\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ορίζεται μέσω της πρόσθεσης στο $\mathbb{R}^2$, δηλ. $\forall\ z_1,z_2\in\mathbb{C}$ με $z_1=x_1+y_1i=(x_1,y_1)$ και $z_2=x_2+y_2i=(x_2,y_2)$ και έχουμε $\underbrace{z_1+z_2}_{(x_1+y_1i)+(x_2+y_2i)}=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i$

Παράδειγμα: $(3+2i)+(5+3i)=8+5i$

Παρατήρηση: Το σύνολο $\mathbb{C}$ είναι μεταθετική ομάδα ως προς την πρόσθεση δηλ. ισχύουν οι ιδιότητες: προσ., μεταθ., $\exists$ ουδ., $\exists$ αντ., τις οποίες αποδεικνύουμε μέσω των αντίστοιχων των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^2$.

Παρασκευή 22/02/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι 3η ώρα

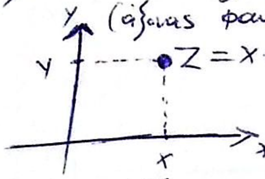
Ειδικότερα, ότι το $0 = 0 + 0i = (0,0)$ είναι το ουδ. στοιχείο της πρόσθεσης προκύπτει ως $z + 0 = (x+yi) + (0+0i) = (x,y) + (0,0) = (x,y) = z$ και αφού $z + (-z) = 0 \iff (x,y) + (-(x,y)) = (x,y) + (-x,-y) = (0,0)$ βλέπουμε ότι ο αντίθετος του $z = x+yi$ είναι ο $-z = (-x) + (-y)i$

<u>Παρατήρηση:</u> Η πρόσθεση του $\mathbb{C}$ επεκτείνει την πρόσθεση στο $\mathbb{R}$ αφού $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$: $x_1 + x_2 = (x_1 + 0i) + (x_2 + 0i) = (x_1 + x_2) + 0i = x_1 + x_2$

<u>Παρατήρηση:</u> Κάθε μιγαδικός αριθμός $z = x+yi$, $(x,y \in \mathbb{R})$ είναι το άθροισμα ενός πραγματικού $x \in \mathbb{R} \iff (x,0) \in \mathbb{R}^2$ και ενός φανταστικού αριθμού $yi = y(0,1) = (0,y)$

$\Big[\underbrace{\text{μιγαδικός}}_{\in Oxy} = \underbrace{\text{πραγματικός}}_{\in \text{ άξονα των } x} + \underbrace{\text{φανταστικός}}_{\in \text{ άξονα των } y}\Big]$ (στο $\mathbb{R}^2$)

Άρα



(άξονας φανταστικών)

$z = x+yi = (x,y) =: \underbrace{\text{Re}\, z}_{\substack{\text{πραγμ.}\\ \text{μέρος}\\ \text{του } z}} + i\, \underbrace{\text{Im}\, z}_{\substack{\text{φανταστ.}\\ \text{μέρος}\\ \text{του } z}}$

(άξονας πραγματικών)

[Προσοχή: $\text{Re}\, z, \text{Im}\, z \in \mathbb{R}$]

Για το λόγο αυτό το $\mathbb{C}$ λέμε ότι ταυτίζεται με το $\mathbb{R}^2$ το οποίο (αντιστοιχεί συνολοθεωρητικά και ως προς (+)) και ως μιγαδικό επίπεδο ονομάζεται (για το $\mathbb{C}$)

Αναφορικά με τον πολλαπλασιασμό (ως εσωτερική πράξη) στο $\mathbb{C}$ $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Αυτός προκύπτει από την απαίτηση να μπορούμε να κάνουμε στο $\mathbb{C}$ πράξεις «όπως στο $\mathbb{R}$» (δλδ πράξεις συνήθως) (με την + και τον ·) οι οποίες θα περιέχουν το i και μάλιστα θα ισχύει: $i^2 = i \cdot i = -1$. Πράγματι, για $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ έχουμε:

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1(x_2 + y_2 i) + y_1 i (x_2 + y_2 i) = x_1 \cdot x_2 + x_1 y_2 i + y_1 i x_2 + y_1 i y_2 i =$
$= x_1 \cdot x_2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i - y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i$

<u>Παρατήρηση</u> (WOW): Πάνω σε αυτή τη δομή του γινομένου δύο μιγαδικών αριθμών στηρίζεται η διαφορά της μιγαδικής παραγώγου και της παραγώγου διανυσματικού πεδίου διάστασης δύο.

<u>Άσκηση</u>: Εξετάστε ότι ο μιγαδικός πολ/μός επεκτείνει τον πολ/μό στο $\mathbb{R}$, ότι ο βαθμωτός πολ/μός στο $\mathbb{R}^2$ είναι ειδική περίπτωση πολ/μού πραγμ. επί μιγαδ., ότι με αυτόν τον πολ/μό και ουδέτερο το $1=(1,0)$ ο πολ/μός αυτός έχει στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}=\mathbb{C}^*$ έχει τις ιδιότητες μεταθετικής ομάδας ότι ισχύουν οι επιμ. ιδιότ.

Μιγαδικές συναρτήσεις Πέμπτη 28/02/19 1η ώρα

<u>Άσκηση</u> (Από προηγούμενο μάθημα)

Πράγματι, με έτσι ορισμένο + και · και $i^2=-1$ το $(\mathbb{C},+,\cdot)$ είναι σώμα.
επεκτείνει το $(\mathbb{R},+,\cdot)$

Πχ το $1\in\mathbb{R}$ αντιστοιχεί στο $1=(1,0)=1+0i\in\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα

$\forall z=x+yi\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ $\quad 1\cdot z=(1+0i)(x+yi)=x+(0x+1\cdot y)i=x+yi=z$

και $\forall z\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ $\exists$ ο αντίστροφος του z, συμβολίζεται με $z^{-1}=\frac{1}{z}$

Ποιος είναι αυτός; Είναι μοναδικός;

Έχουμε $z=x+yi\in\mathbb{C}^*$ δοσμένο. Θα βρω $w=a+bi\in\mathbb{C}^*$ έτσι ώστε $zw=1=1+0i$

$$zw=(x+yi)(a+bi)=(xa-yb)+i(ya+xb) \iff (xa-yb,\, ya+xb)=(1,0) \iff$$

$$\iff \begin{cases} xa-yb=1 \\ xb+ya=0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \Rightarrow w=a+bi=\frac{1}{x^2+y^2}(x-yi)$$

ΑΠΔ για $z=x+yi\in\mathbb{C}^*$ ο αντίστροφος $z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{(-y)}{x^2+y^2}i$

<u>Άσκηση / Παρατήρηση:</u> α) Ο πολ/μός στο $\mathbb{C}$ επεκτείνει τον πολ/μό στον $\mathbb{R}$

β) Ο βαθμωτός πολ/μός στον $\mathbb{R}^2$ είναι ειδική περίπτωση

[(α) «μπορούμε να δούμε τον πολ/μό δύο πραγματικών αριθμών είτε στον $\mathbb{R}$ είτε να δούμε τους αριθμούς ως (ειδικούς) μιγαδικούς να τους πολ/σω ως τέτοιους και θα βγει το ίδιο αποτέλεσμα»

$$x_1 \cdot x_2 = (x_1 + 0i)(x_2 + 0i) = (x_1 \cdot x_2 - 0) - (x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0)i = x_1 \cdot x_2 + 0i = x_1 \cdot x_2$$

(β) (αντίστοιχα για $a \in \mathbb{R}$)

$$az = a(x+yi) = a(x,y) = (ax, ay) = (ax) + (ay)i$$
$$\overset{?}{=} (a+0i)(x+yi) = (ax - 0y) + i(0x + ay) = (ax) + i(ay)$$

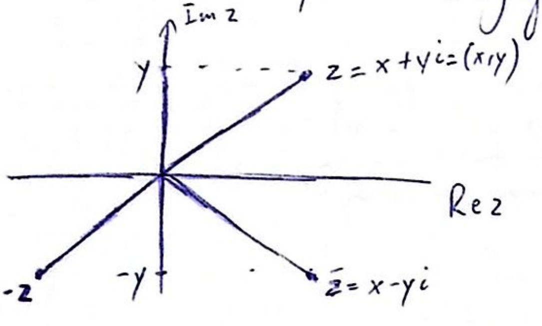
<u>Ορισμός:</u> Έστω $z = x + yi \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Τότε:

$\operatorname{Re} z := x$ ονομάζεται πραγματικό μέρος του z

$\operatorname{Im} z := y$ ονομάζεται φανταστικό μέρος του z

$|z| := \sqrt{x^2+y^2}$ $(= \|(x,y)\|)$ <u>απόλυτη τιμή</u> (ή μέτρο) του z

$\overline{z} := x - yi$ συζυγής μιγαδικός αριθμός του z



μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$

↑ κατοπτρισμός ως προς Re z

<u>Πρόταση:</u> (απλές ιδιότητες των παραπάνω)

Έστω $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Τότε:

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}, \quad z \cdot \overline{z} = |z|^2, \quad |-z| = |z| = |\overline{z}|, \quad \overline{\overline{z}} = z$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$$

και ισχύουν οι ανισότητες:

$$|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \le |z|, \qquad |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

Γεωμετρικά: Οι προβολές του z ως προς άξονες

Μιγαδικές Συναρτήσεις Πέμπτη 28/02/19 2η ώρα

<u>Απόδειξη:</u> Άσκηση εκτός από τα εξής.

(α) $z = x+yi$, $(x,y \in \mathbb{R})$ $\Rightarrow \bar{z} = x - yi \Rightarrow z + \bar{z} = x+yi+x-yi = 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$, όπου $x = \operatorname{Re} z$

(β) $z\bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 - (iy)^2 = x^2+y^2 = |z|^2$

<u>Παρατήρηση:</u> Η ιδιότητα $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \geq 0$ $(\Leftrightarrow |z| = \sqrt{z\cdot\bar{z}})$ είναι χρήσιμη αν π.χ. θέλουμε να υπολογίσουμε (δηλ να γράψουμε $\underbrace{\text{σε αλγεβρική μορφή}}_{\text{δηλ } z=x+yi}$) το $\dfrac{1}{-1+3i}$

$$\frac{1}{-1+3i} = \frac{-1-3i}{(-1+3i)(-1-3i)} = \frac{-1-3i}{(-1)^2+3^2} = -\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$$

Άρα, αν $z \in \mathbb{C}^*$, τότε

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z}\cdot\left(\frac{\bar{z}}{\bar{z}}\right) = \frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

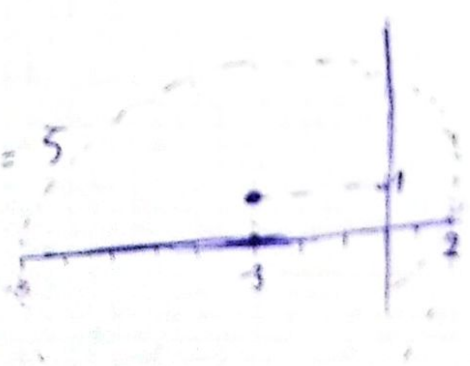
δηλ $\dfrac{1}{x+yi} = \dfrac{x-yi}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} + \dfrac{-y}{x^2+y^2}i$ $\longrightarrow$ Άσκηση 1

<u>Παρατήρηση:</u> Για $i = 0+1i$ έχουμε $\operatorname{Re} i = 0$, $\operatorname{Im} i = 1$, $|i| = 1$ και $\bar{i} = -i$

<u>Άσκηση:</u> Περιγράψτε γεωμετρικά τα σύνολα

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - i + 3| \ =,<,\leq,>,\geq\ 5\}$$

$z = x+yi = (x,y)$ $\qquad \underset{(x,y)}{z} - \underset{(0,1)}{i} + \underset{(3,0)}{3}| = \|(x,y) - (-3,1)\| = 5$



§ 1.2 Δυνάμεις, εκθετική συνάρτηση, πολική μορφή μιγαδικού αριθ

Ορισμός: Για $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τη συνάρτηση n-δύναμης ως

$$z \longmapsto z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n \text{ φορές επαγωγικά}} \quad \forall z \in \mathbb{C} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$z \longmapsto z^0 := 1, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto z^{-n} := \frac{1}{z^n}, \quad z \in \mathbb{C}^*, \ n \in \mathbb{N}$$

Ιδιότητες (Άσκηση)

$\forall z, w \in \mathbb{C}^* \quad z^n \cdot z^m = z^{n+m}, \quad (z^m)^n = z^{nm}$

Άσκηση: Δ.ο. $\overline{z^n} = \bar{z}^n, \ |z^n| = |z|^n \quad \forall z \in \mathbb{C}^*, \ \forall n \in \mathbb{Z}$

- $n = 0$: $\overline{z^0} = \bar{1} = 1 = \bar{z}^0$
- $n \in \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$: $n = 1$: $\overline{z^1} = \bar{z} = \bar{z}^1$

  $n = 2$: $\overline{z^2} \overset{\text{ορ.}}{=} \overline{z \cdot z} \overset{\text{πρ.}}{=} \bar{z} \cdot \bar{z} \overset{\text{ορ.}}{=} \bar{z}^2$

  με επαγωγή: $n = n+1$: $\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \cdot z} = \overline{z^n} \cdot \bar{z} = \bar{z}^n \cdot \bar{z} = \bar{z}^{n+1}$
- $n \in \mathbb{N}$: $\overline{z^{-n}}$

Παρασκευή 01/03/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 1η ώρα

Συνέχεια από χθες

$n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$$\overline{z^{-n}} = \overline{\frac{1}{z^n}} = \frac{1}{\overline{z^n}} = \frac{1}{\bar{z}^n} = \bar{z}^{-n}$$

* αφού $\overline{z^n} \cdot \overline{z^{-n}} = \overline{z^n \cdot z^{-n}} = \bar{1} = 1$

δηλ. για $w = z^n$ $\quad \overline{w}\,\overline{w^{-1}} = \overline{w w^{-1}} = \bar{1} = 1$

§ 1.2.2 Εκθετική συνάρτηση

Προσοχή! Υποθέτουμε ότι η Ανάλυση πραγματικών συναρτήσεων (μιας ή περισσοτέρων ανεξ. μεταβλ.) είναι γνωστή, ειδικότερα οι συναρτήσεις $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sin, \cos, \tan: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και οι ιδιότητες

Ορισμός: Για κάθε φανταστικό αριθμό $iy \in \mathbb{C}, y \in \mathbb{R}$, ορίζουμε τον μιγαδικό αριθμό:

$$\boxed{\exp(iy) := e^{iy} := \cos y + i \cdot \sin y} \quad \text{Τύπος του Euler}$$

Επισήμανση: Εδώ ο τύπος του Euler και η e^{iy} εμφανίζεται ως ορισμός και όχι ως ιδιότητα μιας συνάρτησης $\exp(z) = e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

$$e^{i0} = \cos 0 + i \cdot \sin 0 = 1$$

$$e^{\pm i \pi/2} = \cos(\pm \pi/2) + i \cdot \sin(\pi/2) = \pm i$$

$$e^{\pm i \pi} = \cos(\pm \pi) + i \cdot \sin(\pm \pi) = -1$$

Από την τριγωνομετρική ταυτότητα

$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, $a \in \mathbb{R}$

έχουμε $\boxed{|e^{iy}| = 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}}$, $\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άρτια, $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιττή

$$\overline{e^{iy}} = \overline{\cos y + i \cdot \sin y} = \cos y - i \cdot \sin y = \cos(-y) + i \cdot \sin(-y) = e^{-iy} \Rightarrow \boxed{\overline{e^{iy}} = e^{-iy}}$$

cos είναι 2π-περιοδικές $\Rightarrow e^{i(y + 2k\pi)} = e^{iy}$, $y \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{e^{i2k\pi} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}}$

Από $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

Προκύπτει $e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\cdot\sin(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b +$
$+ i(\sin a \cos b + \sin b \cos a) = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i \sin b) = e^{ia}\cdot e^{ib} \ \forall a,b \in \mathbb{R}$

Άρα $\boxed{e^{i(a+b)} = e^{ia}\cdot e^{ib}} \ \forall a,b\in\mathbb{R}$

Αφού βλέπουμε ότι η «χαρακτηριστική ιδιότητα» της εκθετικής συνάρτησης $\exp: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ => η ιδιότητα αυτή δικαιολογεί το συμβολισμό
$\cos y + i\sin y =: e^{iy} = \exp(iy)$

$e^{x_1+x_2} = e^{x_1}\cdot e^{x_2}$ $\forall x_1, x_2 \in\mathbb{R}$ ισχύει και για φανταστικούς αριθμούς $iy\in\mathbb{C}$, $y\in\mathbb{R}$

Από την $e^{i(y_1+y_2)} = e^{iy_1}\cdot e^{iy_2}$, $y_1, y_2\in\mathbb{R}$ προκύπτουν
$e^{iny} = (e^{iy})^n$, $y\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$
$1 = e^{i0} = e^{i(y-y)} = e^{iy}\cdot e^{-iy} \iff e^{-iy} = \frac{1}{e^{iy}} = (e^{iy})^{-1}$
$e^{i(-n)y} = e^{-iny} = (e^{iny})^{-1} = ((e^{iy})^n)^{-1} = (e^{iy})^{-n} \Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{e^{iny} = (e^{iy})^n \ \forall y\in\mathbb{R} \ \forall n\in\mathbb{Z}}$ τύπος του de Moivre

<u>Ορισμός:</u> Η συνάρτηση $\exp: \mathbb{C}\to\mathbb{C}^*$ με
$\exp z = e^z = e^{x+iy} := e^x\cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$, όπου $z = x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$
ονομάζεται εκθετική συνάρτηση (στο $\mathbb{C}$)

Προφανώς, είναι επέκταση της εκθετικής συνάρτησης στο $\mathbb{R}$
αφού $e^x = e^{x+i\cdot 0} = e^x\cdot e^{i0} = e^x$
<u>και</u> έχει την ιδιότητα:
$\boxed{e^{z+w} = e^z\cdot e^w \ \forall z,w\in\mathbb{C}}$ έχουμε $e^{z+w} = e^{x+iy+a+ib} = e^{(x+a)+i(y+b)} = e^{x+a}\cdot e^{i(y+b)} =$
αφού για $z = x+iy$, $w = a+ib$
$= e^x e^a e^{iy} e^{ib} = e^x e^{iy} e^a e^{ib} = e^z e^w$

Αντίστοιχα, προκύπτουν (Άσκηση) $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$, $e^{nz} = (e^z)^n$, $e^{z-w} = \frac{e^z}{e^w}$, $z,w\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{Z}$
$e^{z+2k\pi i} = e^z$, $\forall z\in\mathbb{C}$, $\forall k\in\mathbb{Z}$

2η ώρα

Παρασκευή 01/03/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 2η ώρα

Πολική μορφή μιγαδικού αριθμού

[Σημαντική, λόγω ύπαρξης πολ/μού στο $\mathbb{C}$, σε αντιδιαστολή με τον $\mathbb{R}^2$]

Από πού ξεκινάμε; Από τα εξής:

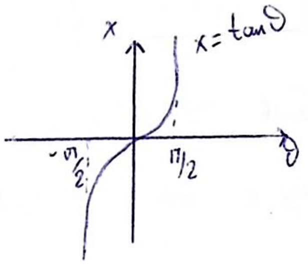
κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ (με καρτεσιανές συντεταγμένες $x,y\in\mathbb{R}$) γράφεται κατά μοναδικό τρόπο σε πολικές συντεταγμένες $(r,\phi)\in(0,+\infty)\times(-\pi,\pi]$ μέσω του 1-1 και επί μετασχηματισμού

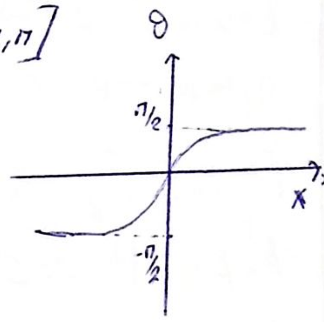
$$(0,+\infty)\times(-\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \qquad (r,\phi)\longmapsto\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos\phi\\r\sin\phi\end{pmatrix}$$

Με τον αντίστροφο μετασχηματισμό $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\longrightarrow(0,+\infty)\times(-\pi,\pi]$

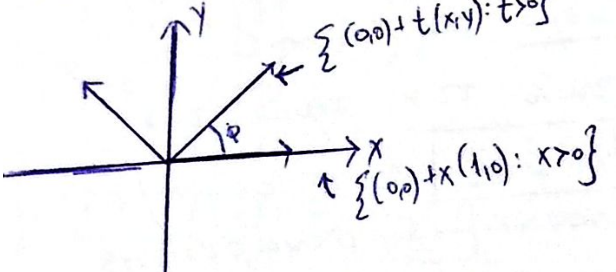
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longmapsto(r,\phi)$ όπου

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\,,\quad \phi=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}, & x>0\\ \pi/2, & x=0,\ y>0\\ \pi+\arctan\frac{y}{x}, & x<0,\ y\geq 0\\ -\pi/2, & x=0,\ y<0\\ -\pi+\arctan\frac{y}{x}, & x<0,\ y<0\end{cases}$$





<u>Γεωμετρικά</u> Σε κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ αντιστοιχεί μια μοναδική, κυρτή, προσανατολισμένη γωνία $\phi\in(-\pi,\pi]$ με κορυφή το 0 από τον θετικό ημιάξονα των πραγματικών $\{(x,0)=(0,0)+x(1,0): x>0\}$ προς τον θετικό ημιάξονα $\{t(x,y): t>0\}$



<u>Άσκηση:</u> ΝΔο ο μετασχηματισμός καρτεσιανές $\rightarrow$ πολικές
$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ $(0,\infty)\times(-\pi,\pi]$
είναι 1-1 και επί και αν $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos\phi\\r\sin\phi\end{pmatrix}$ είναι ο μετασχηματισμός αυτός, τότε ο αντίστροφος δίνεται από τους πιο πάνω τύπους (οι ιδιότητες των tan, arctan, cos, sin, τριγ. ταυτότητες είναι γνωστές)

<u>λύση</u>

Αφού υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοίχιση του $\mathbb{C}^*$ με το $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ προκύπτει ότι υπάρχει ο 1-1 και επί μετασχηματισμός από το $\mathbb{C}^*$ στο $(0,\infty)\times(-\pi,\pi]$ του οποίου ο αντίστροφος είναι ο
$z=x+iy=(x,y)=(r\cos\phi, r\sin\phi)=r\cos\phi+i\cdot r\sin\phi=r\cdot(\cos\phi+i\cdot\sin\phi)=r\cdot e^{i\phi}$
$(r,\phi)\in(0,\infty)\times(-\pi,\pi]$

δηλ $\boxed{z=r\cdot e^{i\phi}}$ $\forall z\in\mathbb{C}^*$ με $(r,\phi)\in(0,\infty)\times(-\pi,\pi]$

Επειδή $z\mapsto(r,\phi)$ μονοσήμαντα και $|z|=|re^{i\phi}|=|r|\cdot|e^{i\phi}|=|r|=r \Rightarrow \boxed{|z|=r}$
προκύπτει: $\boxed{z=|z|\cdot e^{i\phi}}$

Επίσης, λόγω της $2\pi i$-περιοδικότητας της εκθετικής συνάρτησης $e^{z+2k\pi i}=e^{z}$ $\forall z\in\mathbb{C}$
Ακόμη, $\forall z\in\mathbb{C}^*$ ισχύει και $z=|z|e^{i\phi}=|z|\cdot e^{i(\phi+2k\pi)}$, $k\in\mathbb{Z}$, $\phi\in(-\pi,\pi]$

Το σύνολο των γωνιών $\arg z:=\phi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ με ϕ όπως πιο πάνω, ονομάζεται <u>όρισμα του $z\in\mathbb{C}^*$ (argument)</u> και είναι μοναδικό, υπό την έννοια ότι $\forall z\in\mathbb{C}^*$ $\exists!$ $\arg z\in(-\pi,\pi] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \arg z=\phi:=\operatorname{Arg}z$, με ϕ όπως πιο πάνω, το οποίο $\operatorname{Arg}z=\phi$ ονομάζεται <u>πρωτεύουσα (ή κύρια)</u> τιμή του ορίσματος $\arg z$ ή για συντομία <u>πρωτεύον ή κύριο όρισμα</u> του $z\in\mathbb{C}^*$

Το $\arg z$ μπορεί να γραφεί και ως σύνολο των τιμών του
δηλ $\boxed{\arg z=\{\phi+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\}=\{\operatorname{Arg}z+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\}}$ και οι τιμές αυτές είναι οι τιμές της πλειονότιμης συνάρτησης $\arg z$, $z\in\mathbb{C}^*$, της οποίας ο πρωτεύον κλάδος είναι η συνάρτηση $z\mapsto\operatorname{Arg}z$, $z\in\mathbb{C}^*\Rightarrow\forall z\in\mathbb{C}^*$ $\boxed{z=|z|\cdot e^{i\arg z}=|z|\cdot e^{i(\operatorname{Arg}z+2k\pi)}}=$
$=|z|\cdot e^{i\operatorname{Arg}z}\cdot \underbrace{e^{i2k\pi}}_{1}=|z|\cdot e^{i\operatorname{Arg}z}$

<u>Στην πράξη</u>: $\cdot\, z=re^{i\theta}$, $r>0$, $\theta\in\mathbb{R} \Leftrightarrow r=|z|$ και $\theta=\arg z=\operatorname{Arg}z+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$
$\cdot\, z=|r|\cdot e^{i\theta}$, $r>0$, $\theta\in(-\pi,\pi] \Leftrightarrow r=|z|$ και $\theta=\operatorname{Arg}z$

Παρασκευή 01/03/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 3η ώρα

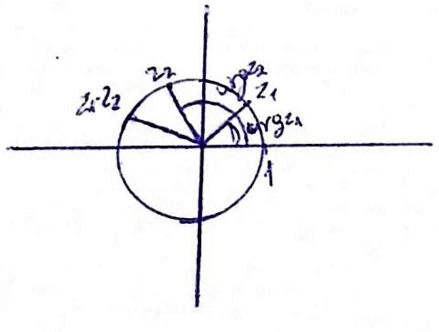
Από το μονοσήμαντο του $\arg z$ προκύπτει και ότι $z_1 = z_2 \iff$
$\iff z_1 = |z_1| \cdot e^{i\arg z_1} = |z_2| e^{i\arg z_2} \iff |z_1| = |z_2| \wedge \arg z_1 = \arg z_2 \iff \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2$

Ορισμός: Η πολική μορφή μιγαδικού αριθμού $z \in \mathbb{C}^*$ είναι η $z = |z| \cdot e^{i\arg z}$ όπου $|z|$ η απόλυτη τιμή του και $\arg z$ το όρισμά του.

Η σημασία της για την μιγαδική ανάλυση οφείλεται στην ύπαρξη πολ/μού στο $\mathbb{C}^*$, ο οποίος έτσι ερμηνεύεται γεωμετρικά.

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot e^{i\arg z_1} |z_2| e^{i\arg z_2} = |z_1||z_2| e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)} = |z_1 z_2| \cdot e^{i\arg(z_1 z_2)}$$

Γεωμετρικά, η θέση στο μιγαδικό επίπεδο του γινομένου δύο μιγαδικών αριθμών ($\neq 0$) βρίσκεται αν πολ/σω τις απόλυτες τιμές τους (το οποίο δίνει την απόλυτη τιμή του γινομένου) και στρέψουμε το όρισμα του ενός κατά το όρισμα του άλλου



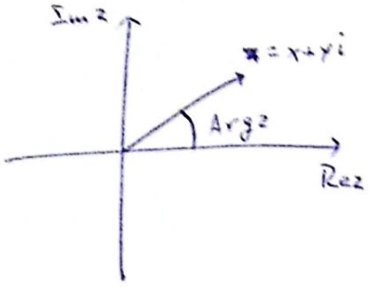
Επανάληψη των προηγούμενων και ασκήσεις έως Α17 εκτός από κάποιες πολύ γεωμετρικές

Πέμπτη 14/03/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 1η ώρα

<u>Υπενθύμιση:</u> Κάθε $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ μπορεί να αναπαρασταθεί μιγαδικά σε πολική (ή τριγωνομετρική μορφή):

$z = |z| \cdot e^{i \cdot Argz}$, όπου $|z| > 0$ είναι η απόλυτη τιμή

$Argz$ το κύριο όρισμα του z με $Argz \in (-\pi, \pi]$ (το $Argz$ είναι η προσανατολισμένη γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του θετ. ημιάξονα των πραγματικών και του διανύσματος (x,y), αν $z = x+yi$ σε αλγεβρική μορφή)



Το σύνολο $\arg z = Argz + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ονομάζεται όρισμα του z και ισχύει $z = |z| e^{i \cdot Argz} = |z| e^{i \arg z}$ λόγω της 2π-περιοδικότητας της $e^{iy} = \cos y + i \sin y, y \in \mathbb{R}$

<u>Παρατήρηση:</u> Για κάθε σημείο του μοναδιαίου κύκλου στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$, υπάρχει μοναδικό κύριο όρισμα $\phi = Argz \in (-\pi, \pi]$ έτσι ώστε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1 \iff z = e^{i\phi} = \cos\phi + i \cdot \sin\phi$ αφού $\forall\, \phi, \psi \in \mathbb{R}$

$$e^{i\phi} = e^{i\psi} \overset{(1)}{\iff} e^{i(\phi - \psi)} = 1 \iff \cos(\phi - \psi) + i \sin(\phi - \psi) = 1 \overset{(2)}{\iff} \cos(\phi - \psi) = 1 \mid \sin(\phi - \psi) = 0$$

$$\overset{(3)}{\iff} \phi - \psi = 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

1) Λόγω ιδιοτήτων της συνάρτησης $e^{iy} = \cos y + i \sin y$
2) Λόγω του ορισμού της
3) Ιδιότητες τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Συνεπώς, αν $\phi, \psi \in (-\pi, \pi] \Rightarrow \phi - \psi \in (-2\pi, 2\pi)$ τότε $\phi - \psi = 2k\pi \in (-2\pi, 2\pi) \Rightarrow \phi - \psi = 0$. Άρα:

$$\boxed{e^{i\phi} = e^{i\psi} \text{ με } \phi, \psi \in (-\pi, \pi] \Rightarrow \phi = \psi}$$

<u>Πόρισμα:</u> $e^{i\theta} = 1, \theta \in \mathbb{R} \iff \theta = 2k\pi \in \mathbb{Z}$

$e^{i\theta} = 1, \theta \in (-\pi, \pi] \iff \theta = 0$

Παραδείγματα (Βασικά κύρια ορίσματα)

α) $x \in \mathbb{R},\ x>0$

$$x = |x|\cdot e^{i\arg x} \underset{x>0}{=} x\cdot e^{i\arg x} \Rightarrow e^{i\arg x} = 1 \Rightarrow e^{i\arg x} = e^{i2k\pi} \Rightarrow \arg x = 2k\pi \Rightarrow \operatorname{Arg}x + 2k\pi = 2k\pi$$
$$\Rightarrow \operatorname{Arg}x = 0$$

β) $x \in \mathbb{R},\ x<0$

$$x = |x|\cdot e^{i\arg x} = -x\cdot e^{i\arg x} \Rightarrow e^{i\cdot\arg x} = -1 = e^{i(2k\pi+\pi)} \Rightarrow \arg x = 2k\pi+\pi \Rightarrow \operatorname{Arg}x + 2k\pi = 2k\pi+\pi \Rightarrow \operatorname{Arg}x = \pi$$

γ) $y \in \mathbb{C},\ y>0$

$$\operatorname{Arg}(iy) = \pi/2$$

δ) $y \in \mathbb{C},\ y<0$

$$\operatorname{Arg}(iy) = -\pi/2$$

ε) $$1+i = |1+i|\cdot e^{i\arg(1+i)} = \sqrt{2}\cdot e^{i\arg(1+i)} \Rightarrow e^{i\arg(1+i)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = e^{i(2k\pi+\pi/4)} \Rightarrow \arg(1+i) = 2k\pi+\pi/4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \operatorname{Arg}(1+i) + 2k\pi = 2k\pi + \pi/4 \Rightarrow \operatorname{Arg}(1+i) = \pi/4$$

στ) $$1-i = |1-i|\cdot e^{i\arg(1-i)} = \sqrt{2}\cdot e^{i\arg(1-i)} \Rightarrow e^{i\arg(1-i)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) = e^{i(2k\pi-\pi/4)} \Rightarrow \arg(1-i) = 2k\pi-\pi/4 \Rightarrow \operatorname{Arg}(1-i)+2k\pi = 2k\pi-\pi/4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \operatorname{Arg}(1-i) = -\pi/4$$

ζ) $$-1-i = |-1-i|\cdot e^{i\operatorname{Arg}(-1-i)} \Rightarrow \operatorname{Arg}(-1-i) = -3\pi/4$$

η) $$-1-\sqrt{3}i = |-1-\sqrt{3}i|\cdot e^{i\arg(-1-\sqrt{3}i)} = 2e^{i\arg(-1-\sqrt{3}i)} \Rightarrow e^{i\arg(-1-\sqrt{3}i)} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i(2k\pi-2\pi/3)} \Rightarrow \operatorname{Arg}(-1-\sqrt{3}i) = -2\pi/3$$

θ) $$\pi+ei = |\pi+ei|\cdot e^{i\arg(\pi+ei)} = \sqrt{\pi^2+e^2}\cdot e^{i\arg(\pi+ei)} \Rightarrow e^{i\arg(\pi+ei)} = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+e^2}} + i\frac{e}{\sqrt{\pi^2+e^2}} \Rightarrow \operatorname{Arg}(\pi+ei) = \arctan\frac{\pi}{e}$$

Εδώ χρησιμοποιούμε τον γενικό τύπο του αντίστροφου μετασχηματισμού από καρτεσιανές σε πολικές

$$(1-i)^{23} = \left(|1-i|\, e^{i\cdot\arg(1-i)}\right)^{23} = \left(\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot(-\pi/4)}\right)^{23} = (\sqrt{2})^{23}\cdot e^{-i\pi/4\cdot 23} = (\sqrt{2})^{23}\cdot e^{-i(-\pi/4)} = (\sqrt{2})^{23}\cdot e^{i\pi/4} =$$
$$= (\sqrt{2})^{23}\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = (\sqrt{2})^{22}\cdot(1+i) = 2^{11}\cdot(1+i)$$

Πέμπτη 14/03/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 2η ώρα

1.3 Ρίζες και Λογάριθμοι

1.3.1: Επίλυση ως προς z της $z^n = w$ για $w \in \mathbb{C}$ και $n \in \mathbb{N}$.

- $w = 0$: $z^n = 0 \iff |z^n| = 0 \iff |z|^n = 0 \iff |z| = 0 \iff z = 0$

- $w \neq 0$: Τότε $w = |w| \cdot e^{i \arg w} = r \cdot e^{i\theta}$ και $z = |z| \cdot e^{i \arg z} = p \cdot e^{i\phi}$, όπου $|z| \neq p > 0$ αφού αν έπαιρνε την τιμή 0 θα είχα την πάνω περίπτωση

$z^n = w \iff (p \cdot e^{i\phi})^n = r \cdot e^{i\theta} \iff p^n \cdot e^{in\phi} = r \cdot e^{i\theta} \Longrightarrow$

$\Rightarrow p^n = r$ και $n\phi = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \iff p = \sqrt[n]{r}$ και $\phi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$

Μπορώ να πάρω και απόλυτες τιμές στα 2 μέλη θα μου βγει το ίδιο

Αντίστροφα, υψώνοντας στη δύναμη n, διαπιστώνουμε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί $Z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, λύσω την $z^n = w = r \cdot e^{i\theta}$ και ότι για όλα τα άλλα $k \in \mathbb{Z}$ προκύπτουν οι ίδιοι αριθμοί.

Αυτές είναι όλες οι ρίζες της $z^n = w$ οι οποίες είναι μεταξύ τους διαφορετικές, αφού για $k, l \in \{0, \dots, n-1\}$

$z_k = z_l \iff e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} = e^{i\frac{\theta + 2l\pi}{n}} \iff e^{i\frac{2(k-l)\pi}{n}} = 1 \iff \dfrac{2(k-l)\pi}{n} = 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$

$\iff k - l = nm \Rightarrow |k - l| = n \cdot |m|$, $m \in \mathbb{Z}$ και αφού $k - l \leq k \leq n-1$ και

$l - k \leq l \leq n-1 \Rightarrow |k-l| \leq n-1 \Rightarrow |k - l| = \underline{n|m| \leq n-1}$, $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 0 \Rightarrow \boxed{k = l}$

$n \in \mathbb{N}$ (γινόμενο φυσικών μικρότερο από έναν μικρότερο φυσικό $\Rightarrow m = 0$)

Επομένως, τετριμμένο (trivial) SOS.

Η $z^n = w \neq 0$ έχει ακριβώς n διαφορετικές ρίζες τις

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{|w|} \cdot e^{i\frac{\arg w + 2k\pi}{n}}, \ k = 0, \dots, n-1}$$

Ειδικότερα, για $w = 1$, έχουμε ως λύσεις της $\zeta^n = 1$ τις n-οστές ρίζες της μονάδας:

$$\boxed{\zeta_k = e^{\frac{2\pi i k}{n}}, \ k = 0, \dots, n-1}$$

Παρασκευή 15/03/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 1η ώρα

Ορισμός: Η συνάρτηση $\sqrt[n]{\cdot} : z \mapsto \sqrt[n]{z} := \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{Arg z}{n}}$ για $z \in \mathbb{C}^*$ και $\sqrt[n]{0} := 0$, όπου $n \in \mathbb{N}$, ονομάζεται η συνάρτηση της ν-οστής ρίζας.

Παρατήρηση

α) $\sqrt[n]{w} = z_0$, ρίζα της $z^n = w$

β) Η συνάρτηση της n-οστής ρίζας (στο $\mathbb{C}$) $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι επέκταση της συνάρτησης n-οστής ρίζας στο $[0,\infty)$, ΔΑΔ της
$\sqrt[n]{r} = e^{\frac{\ln r}{n}}, r > 0, \sqrt[n]{0} = 0$

γ) [Απόδειξη άσκηση, βλ. σημειώσεις] Η συνάρτηση της n-οστής ρίζας $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{C} \to \sqrt[n]{\mathbb{C}} = \underbrace{\{0\} \cup \{w \in \mathbb{C}^* : -\frac{\pi}{n} < Arg w \leq \frac{\pi}{n}\}}_{=:\Gamma}$

Είναι 1-1 και επί με αντίστροφη τον περιορισμό της συνάρτησης η δύναμη:

$$g = \cdot^n : \Gamma \to \mathbb{C},\ g(w) = w^n$$

δ) Με τον ορισμό της συνάρτησης n-οστής ρίζας οι ρίζες της $z^n = w$, $w \in \mathbb{C}^*$, είναι οι $z_k = \sqrt[n]{w}\, e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k = 0, \dots, n-1$

$$= z_0 \cdot e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

Πχ: Για $n=2$ προκύπτει: $z^2 = w \in \mathbb{C}^* \iff z = \pm\sqrt{w}$, αφού $e^{i0} = 1$ και $e^{i\pi} = -1$. Αυτό προκύπτει από:

$$z_0 = \sqrt{|w|}\, e^{i\frac{Arg w}{2}} = \sqrt{w}$$

$$z_1 = \sqrt{|w|}\, e^{i\frac{Arg w}{2}} \cdot e^{i\pi} = -\sqrt{|w|} \cdot e^{i\frac{Arg w}{2}} = -\sqrt{w}$$

Παράδειγμα 1 (Super trivial ΔΟΣ)

Να επιλυθεί η $az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$

$az^2 + bz + c = 0 \iff z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0 \iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \overset{\text{Παρ. (δ)}}{\iff}$

$z = -\frac{b}{2a} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}_{\in \mathbb{C}} \to$ Η εικόνα του υπόριζου υπό τη συνάρτηση 2-οστής ρίζας

2) $z^2=-1$ $(az^2+bz+c=0$ με $a=1=c, b=0)$

Έχει λύσεις: $z=\pm\sqrt{-1}$, με $\sqrt{-1}=\sqrt{|-1|}\cdot e^{i\frac{Arg(-1)}{2}}=\sqrt{1}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\pi/2+i\cdot\sin\pi/2=$
$=i$

Προσοχή: Η συνάρτηση n-οστής ρίζας είναι επέκταση της πραγματικής ρίζας μόνο για μη αρνητικούς πραγματικούς $r\geq 0$.

Πχ $\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{|-1|}\cdot e^{i\frac{Arg(-1)}{3}}=\sqrt[3]{1}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos\pi/3+i\cdot\sin\pi/3=1/2+i\sqrt{3}/2$

[Και όχι $\sqrt[3]{-1}=-1$! όπως καμιά φορά ορίζεται στους πραγματικούς]

Το ότι καμιά φορά λέμε « $\sqrt[3]{-1}=-1$ » οφείλεται στο ότι η εξίσωση $z^3=-1$ έχει 3 διαφορετικές μιγαδικές ρίζες, τις:

$$z_0=\sqrt[3]{-1}=e^{i\pi/3}$$
$$z_1=e^{i\pi/3}\cdot e^{i\frac{2\cdot 1\cdot\pi}{3}}=e^{i\pi}$$
$$z_2=e^{i\pi/3}\cdot e^{i\frac{2\cdot 2\cdot\pi}{3}}=e^{i\frac{5\pi}{3}}=e^{-i\pi/3}$$

1.3.2. Επίλυση της $e^z=w$ και λογαριθμική συνάρτηση

Έστω $w\in\mathbb{C}^*$. Θέλουμε να επιλύσουμε την εξίσωση $e^z=w$

[Αφού $|e^z|=|e^{Rez+i\cdot Imz}|=|e^{Rez}|>0$, για $w=0$ η εξίσωση δεν έχει λύση]

Επίλυση: $e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=w=\underbrace{|w|\cdot e^{i\cdot Argw}}_{\text{Μοναδική παράσταση του } w \text{ σε πολική μορφή.}}=|w|\cdot e^{i\arg w}$

$\Leftrightarrow e^x=|w|$ και $y=\arg w=Argw+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Συνεπώς, οι λύσεις της $e^z=w$ είναι η $\boxed{z_k=\ln|w|+i(Argw+2k\pi), k\in\mathbb{Z}}$

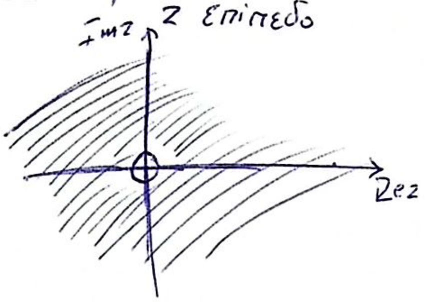
όπου $\ln:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι η αντίστροφη της $\exp:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ οι οποίες θεωρούνται γνωστές.

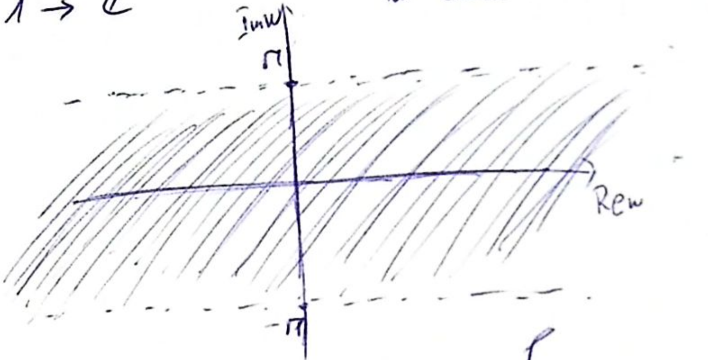
Ορισμός: Η συνάρτηση $\boxed{\log: z\mapsto \log z:=\ln|z|+i\cdot Arg z, z\in\mathbb{C}^*}$ ονομάζεται λογαριθμική συνάρτηση και η τιμή $\log z$ ονομάζεται λογάριθμος του $z\in\mathbb{C}^*$

Παρασκευή 15/03/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 2η ώρα

Παρατήρηση:
α) Η λογαριθμική συνάρτηση στο $\mathbb{C}^*$ είναι επέκταση του φυσικού λογαρίθμου στο $(0,+\infty)$

β) [Απόδειξη άσκηση, βλ. σημειώσεις]
Η λογαριθμική συνάρτηση $\log: \mathbb{C}^* \longrightarrow \log(\mathbb{C}^*) = \{w \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} w \leq \pi\} = \Lambda$ είναι 1-1 και επί με αντίστροφη τον περιορισμό της εκθετικής στο Λ, $\exp: \Lambda \to \mathbb{C}^*$





γ) Με τον ορισμό αυτόν προκύπτει ότι οι ρίζες της $e^z = w$ είναι οι $z_k = \log w + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$

δ) Πολλές φορές η $\log: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ του ορισμού συμβολίζεται ως Log ονομάζεται κύριος (ή πρωτεύων) κλάδος της πλειονότιμης λογαριθμικής συνάρτησης $z \longmapsto \operatorname{Log} z + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$

Παράδειγμα: Να επιλυθεί ως προς $z \in \mathbb{C}$ η εξίσωση
$e^z = i \iff z = \log i + 2k\pi i \; (k \in \mathbb{Z}) = \ln|i| + i \operatorname{Arg} i + 2k\pi i = i \cdot \pi/2$

$(\operatorname{Arg}: \mathbb{C}^* \to (-\pi, \pi])$, $(\log: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C})$

1.3.3. Η συνάρτηση λ-δύναμης $\lambda \in \mathbb{C}$

Ορισμός: Η συνάρτηση $\cdot^\lambda : z \longmapsto z^\lambda$, $z \in \mathbb{C}^*$ με τύπο
$z^\lambda := e^{\lambda \cdot \log z}$, ονομάζεται συνάρτηση της λ-δύναμης και η τιμή z^λ ονομάζεται λ δύναμη του z.

Παράδειγμα:

$i^{i} = e^{i\cdot \log i} = e^{i\cdot\frac{i\pi}{2}} = e^{-\pi/2} \in \mathbb{R}$

Παρατηρήσεις:

α) $\cdot^{\lambda}: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ ταυτίζεται στο $\mathbb{C}^*$ για $\lambda = n \in \mathbb{Z}$ με τη συνάρτηση n-οστής δύναμης και για $\lambda = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ με τη συνάρτηση της n-οστής ρίζας

β) Ιδιότητες [Απόδειξη άσκηση, βλ. σημειώσεις]
Για $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $z, w \in \mathbb{C}^*$, ισχύουν: $z^{-\lambda} = \frac{1}{z^{\lambda}}$, $z^{\lambda}\cdot z^{\mu} = z^{\lambda+\mu}$ και αν $\lambda\cdot \log z \in A = \{w \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$ ισχύουν επιπλέον: $(z^{\lambda})^{\mu} = z^{\lambda\cdot\mu}$, ενώ αν $zw \in A$, επίσης: $(zw)^{\lambda} = z^{\lambda}\cdot w^{\lambda}$

Να δω τις ασκήσεις μέχρι 1.26, σελίδα 32.
Την επόμενη Τετάρτη ~~[illegible]~~ 10:00-12:00 αναπλήρωση.

Κεφάλαιο 2: Τοπολογία του $\mathbb{C}$ - Ακολουθίες του $\mathbb{C}$ - Όρια και συνέχεια μιγ. συν. μιγ. μ.

2.1 Τοπολογία του $\mathbb{C}$

Όπως είδαμε, το σώμα $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ αντιστοιχεί (1-1 και επί) στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ πάνω από το $\mathbb{R}$, εφοδιασμένο επιπλέον με τον εσωτερικό πολ/μο $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ [$\Rightarrow i^2 = (0,1)(0,1) = (-1, 0) = -1$]

και $\boxed{|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|}$

Η απόλυτη τιμή του $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$ αντιστοιχεί στην Ευκλείδια νόρμα του διανύσματος $\|(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)\|$ $\Rightarrow$ Η τοπολογία του $\mathbb{C}$ είναι η τοπολογία του $\mathbb{R}^2$.

Πιο συγκεκριμένα, ως προς τις τοπολογικές ιδιότητές του, θεωρούμε το $\mathbb{C}$ ως χώρο με νόρμα (επειδή είναι και πλήρης: χώρος Banach) $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ο οποίος αντιστοιχεί στον διδιάστατο ~~[illegible]~~ διανυσματικό χώρο (πάνω από το $\mathbb{R}$) με νόρμα $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ ο οποίος είναι μετρικός χώρος.
Ειδικότερα, ως νόρμα η απόλυτη τιμή $|\cdot| : \mathbb{C} \to [0, +\infty)$ έχει τις απαιτούμενες ιδιότητες, δηλ. $|z| \geq 0$ και $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

$|\lambda z| = |\lambda|\cdot|z|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$

$|z + w| \leq |z| + |w|$

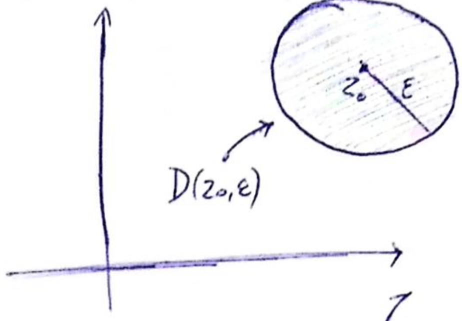
και επάγει την απόσταση μεταξύ των $z, w \in \mathbb{C}$ (μετρική): $d(z,w) = |z - w|$ με τις ιδιότητες: $|z - w| \geq 0$ και $|z - w| = 0 \Leftrightarrow z = w$ για $z, w, a \in \mathbb{C}$

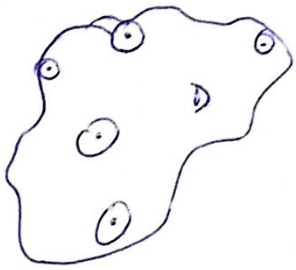
$|z - w| \leq |z - a| + |a - w|$

Παρασκευή 15/03/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 3η ώρα

<u>Ορισμός</u>: Ένα υποσύνολο $D \subset \mathbb{C}$ ονομάζεται ανοικτό αν
$\forall z \in D \ \exists \varepsilon > 0 : D(z,\varepsilon) := \{w \in \mathbb{C} : |z-w| < \varepsilon\} \subset D$

[Το $D(z,\varepsilon)$ ονομάζεται ανοικτός κυκλικός δίσκος κέντρου z, ακτίνας $\varepsilon > 0$]





Ένα υποσύνολο ονομάζεται κλειστό, αν $\mathbb{C} \setminus D$ είναι ανοικτό.

<u>Πρόταση 2.1.1</u>: Ισχύουν όλες οι αντίστοιχες ιδιότητες ανοικτών και κλειστών στον $\mathbb{R}^2$.

<u>Ορισμός</u>: $\overline{D}(z,r) = \{w \in \mathbb{C} : |z-w| \le r\}$ κλειστός κυκλικός δίσκος κέντρου z, ακτίνας r

$\partial D(z,r) = \{w \in \mathbb{C} : |z-w| = r\}$ κύκλος κέντρου z, ακτίνας r

Όλα τα σχετικά ορίζονται ανάλογα.

Να δω άσκηση 27.

Πέμπτη 21/03/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 1η ώρα

Τοπολογία του $\mathbb{C}$ = Τοπολογία του $\mathbb{R}^2$

Ακολουθίες στο $\mathbb{C}$ = Ακολουθίες στον $\mathbb{R}^2$

Πιο αναλυτικά: Ακολουθία στο $\mathbb{C}$ = απεικόνιση από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{C}$

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$, $(z_n) \subset \mathbb{C}$

Ορισμός: Μια ακολουθία $(z_n) \subset \mathbb{C}$ συγκλίνει στο $z_0 \in \mathbb{C}$:<=>

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |z_n - z_0| < \varepsilon$

Συμβολικά: $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0$ ή $z_n \to z_0$ ή $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$

Αν μια ακολουθία συγκλίνει, το όριο είναι μοναδικό

Παρατήρηση: α) $z_n \to z_0 \iff z_n - z_0 \to 0 \iff \underbrace{|z_n - z_0|}_{\in\mathbb{R}} \to 0$

β) $z_n \to z \Rightarrow |z_n| \to |z_0| \iff \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z_0 \wedge \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z_0 \iff$

$\iff \left((\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z_0)^2 + (\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z_0)^2\right)^{1/2} \to 0 \iff \|(\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z_0, \operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z_0)\| \to 0$

Αντίστοιχα, όπως και στο $\mathbb{R}^2$, ορίζονται η υπακολουθία, φραγμένη ακολουθία ($\exists c > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} : |z_n| < c$), ακολουθία Cauchy <=> συγκλίνουσα ακολουθία.

Πρόταση: $z_n \to z$, $w_n \to w \Rightarrow z_n + w_n \to z + w$, $z_n w_n \to zw$, $\frac{z_n}{w_n} \to \frac{z}{w} \ (w \neq 0)$

Απόδειξη: $z_n + w_n \to z + w$ όπως και στον $\mathbb{R}^2$. Για τα άλλα δύο, όπως στον $\mathbb{R}^2$.

<u>Πρόταση</u>: Έστω $z_n \to z$, $w_n \to w$, $\varepsilon > 0$. Τότε, ως συγκλίνουσα, η (z_n) είναι φραγμένη $\Rightarrow \exists\, C > |w|$ με $|z_n| < C$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Επίσης, $\exists\, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$: $\forall\, n \geq n_1$: $|z_n - z| < \dfrac{\varepsilon}{2C}$

$\Rightarrow \forall\, n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$: $|z_n w_n - zw| \leq |z_n| \cdot |w_n - w| + |w| |z_n - z| \leq C \frac{\varepsilon}{2C} + C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon$

Παίρνουμε γνωστά όσα ξέρουμε για ακολουθίες και σύγκλισή τους στο $\mathbb{R}^2$.

Ειδικότερα, $a^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, $a \in (-1,1)$ → $z^n \to 0$ για $z \in D(0,1)$ ή $|z| < 1$

$z^n \to \infty$ για $|z| > 1$

$\sqrt[n]{a} \to 1$, $a \in (0, +\infty)$

$\sqrt[n]{n} \to 1$

Αντιπαράδειγμα: $(i^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ έχει τιμές $i^n = (e^{i\pi/2})^n = e^{in\pi/2} =$
$= \cos(n\pi/2) + i \sin(n\pi/2) = \begin{cases} 1, & n = 4k \\ i, & n = 4k+1 \\ -1, & n = 4k+2 \\ -i, & n = 4k+3 \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

(i^n) δε συγκλίνει αφού έχει 4 διαφορετικά σημεία συσσώρευσης

Όμως: $|i^n| = |i|^n = 1^n = 1 \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$

<u>Παράδειγμα</u>: (Στην πράξη, υπολογίζουμε όρια ακολουθιών, όπως αν πάρουμε την αλγεβρική μορφή της)

<u>πχ</u> $\sqrt[n]{n} + i\sqrt[n]{2} \to 1 + i \iff \left[(\sqrt[n]{n}, \sqrt[n]{2}) \to (1,1) \right]$

<u>Παρατήρηση</u>: Όπως και στον $\mathbb{R}^2$ και γενικότερα σε μετρικούς χώρους (και σίγουρα σε χώρους με νόρμα, πεπερ. διάστ.) οι ακολουθίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για την εξέταση τοπολογικών ιδιοτήτων υποσυνόλων του $\mathbb{C}$.

<u>Πχ</u> $D \subset \mathbb{C}$ κλειστό $\iff \forall\, (z_n) \subset D$ με $z_n \to z_0 \in \mathbb{C}$: $z_0 \in D$

Μέχρι τώρα: σύγκλιση ακολουθίας στο $\mathbb{C}$ σε σημείο του $\mathbb{C}$ (όπως στον $\mathbb{R}^2$)

«Ανάλογα» με το $\mathbb{R}$, υπάρχει και στο $\mathbb{C}$ η έννοια της σύγκλισης στο άπειρο

Πέμπτη 21/03/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 2η ώρα

Επεκτείνουμε το $\mathbb{C}$ στο επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο $\tilde{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ με ένα επιπλέον («κατ' εξοχήν») σημείο (βασικά δεν είναι σημείο) το οποίο δεν ανήκει στο $\mathbb{C}$ [$\infty \notin \mathbb{C}$] το οποίο ονομάζεται άπειρο.

<u>Ορισμός:</u> Μια ακολουθία $(z_n) \subset \mathbb{C}$ συγκλίνει (τείνει) στο άπειρο (συμβ. $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ ή $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$) αν

$$\forall\, r>0 \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \underbrace{|z_n|}_{\in [0,+\infty) \subset \mathbb{R}} > r \quad (\iff |z_n| \to +\infty)$$

<u>Παρατήρηση:</u> Για το αν $z_n \to \infty$, τα $\arg z_n$ δεν παίζουν κανένα ρόλο!

$\Rightarrow$ (Προσοχή!) Μπορεί κάποια ακολουθία πραγματικών αριθμών να συγκλίνει στο $\infty \in \tilde{\mathbb{C}}$ αλλά να μην συγκλίνει στο $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ δε συγκλίνει ούτε στο $+\infty$, ούτε στο $-\infty$

<u>πχ</u> $n(-1)^n \subset \mathbb{R}$ δε συγκλίνει στο $\tilde{\mathbb{R}}$ $\iff$ $n \to \infty$ στο $\tilde{\mathbb{R}}$

αλλά $n(-1)^n \longrightarrow \infty$ στο $\tilde{\mathbb{C}}$

<u>Στην πράξη:</u> $z_n \to \infty \iff \forall\, \frac{1}{\varepsilon} > 0 \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ \forall\, n \geq n_0 : |z_n| > \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{|z_n|} < \varepsilon \iff$

$\iff \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ \forall\, n \geq n_0 : \frac{1}{|z_n|} < \varepsilon \iff \frac{1}{|z_n|} \to 0 \iff \boxed{\frac{1}{z_n} \to 0}$

Από τον ορισμό του $z_n \to \infty$ προκύπτει ότι $\exists\, n_0 \ \forall\, n \geq n_0 : |z_n| > 0$

<u>Παρατήρηση:</u> Στο $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ορίζονται συμβολικά οι πράξεις:

$\infty \pm z = z \pm \infty = \infty \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$

$w\infty = \infty \cdot w \quad \forall\, w \in \mathbb{C}^*$

$\frac{z}{\infty} = 0,\ \frac{\infty}{z} = \infty,\ \frac{w}{0} = \infty$

αλλά δεν ορίζονται ούτε συμβολικά:

$\infty \pm \infty,\ 0 \cdot \infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}$

Παραδείγματα: α) $\underbrace{\frac{1}{n}}_{\searrow 0} + i\underbrace{\sqrt{n}}_{\searrow +\infty} \to \infty \iff \left|\frac{1}{n} + i\sqrt{n}\right| \to \infty \iff \frac{|1+in^{3/2}|}{n} \to \infty \iff$

$\iff \frac{\sqrt{1+n^3}}{n} \to \infty$ ισχύει $\left(\text{αφού } \frac{n}{\sqrt{1+n^3}} \to 0\right)$

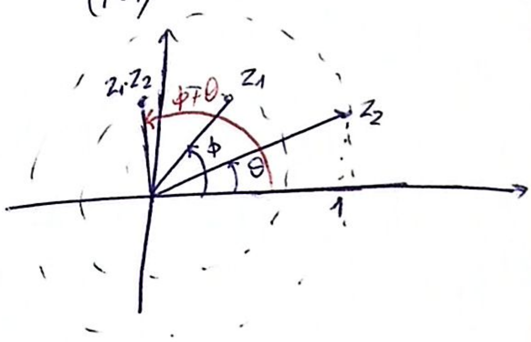
β) Από τους παραπάνω συμβολικούς ορισμούς έχουμε:

i) $z_n \to \infty$, $\tilde{z}_n \to z \in \mathbb{C} \Rightarrow z_n \pm \tilde{z}_n \to \infty$, $\tilde{z}_n \pm z_n \to \infty$ (Άσκηση)

ii) $\left.\begin{array}{l} w_n \to \infty, \ \tilde{w}_n \to w \in \mathbb{C}^* \\ z_n \to \infty, \ \tilde{z}_n \to z \in \mathbb{C}. \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{w}_n z_n \to \infty, \ z_n w_n \to \infty, \ \frac{\tilde{z}_n}{z_n} \to 0$

γ) $|z| > 1 \Rightarrow z^n \to \infty$, αφού $|z^n| = |z|^n \to +\infty \iff \left(\frac{1}{|z|}\right)^n \to 0$

$\left[z^n = e^{n \log z} = e^{n \cdot \ln|z|} \cdot e^{in \operatorname{Arg} z} = |z|^n \cdot e^{in \arg z}\right]$



$\boxed{\underbrace{z_n \to \infty}_{\text{στο } \mathbb{C}} \iff \underbrace{|z_n| \to +\infty}_{\text{στο } \mathbb{R}}}$

Να δω A.32, A.36, A.29 - A.36

Παρασκευή 22/03/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 1η ώρα

Όρια και συνέχεια συναρτήσεων

Ορισμός: Μιγαδική συνάρτηση $= f: D \to \mathbb{C},\ D \subset \mathbb{C}$

Παρατήρηση: 1) $(f+g)(z) = f(z)+g(z)$, $(fg)(z) = f(z)g(z)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{f(z)}{g(z)},\ g(z)\neq 0$

$f(g(z)) = (f\circ g)(z)$

Παραδείγματα: Έστω $f: D\to\mathbb{C}$, $D\subset\mathbb{C}$, τότε $f(z) = Re(f(z)) + i\,Im(f(z)) =: (Re f)(z) \dot{+} (Im f)(z) \Rightarrow Re f: D\to\mathbb{R},\ Im f: D\to \mathbb{R}$ είναι πραγματικές συναρτήσεις μιγαδικών μεταβλητών

Επίσης, αφού για $f(z)\in \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ έχουμε $f(z) = |f(z)|\cdot e^{i\,Arg(f(z))} = |f|(z)\cdot e^{i\,Arg f(z)}$
και άρα οι συναρτήσεις $|f|: D\to[0,+\infty)\subset\mathbb{R}$, $Arg f: D\to(-\pi,\pi]\subset\mathbb{R}$ ονομάζονται συναρτήσεις της απόλυτης τιμής της f και του κύριου ορίσματος της f.

3) Ακόμα και πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής $f: D\to\mathbb{R},\ D\subset\mathbb{R}$, μπορούν να θεωρηθούν ως μιγαδικές συναρτήσεις μιγαδικών μεταβλητών αφού $D\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ και $f(D)\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$. Σημαντικοί στόχοι της μιγαδικής ανάλυσης η καλύτερη κατανόηση/μελέτη ιδιοτήτων πραγματικών συναρτήσεων πραγμ. μεταβ. μέσω της επέκτασής τους σε μια περιοχή του $\mathbb{C}$ και «φυσιολογικό τρόπο», δηλ. αν έχουμε μια $f: D\to\mathbb{R},\ D\subset\mathbb{R}$, θέλουμε να επεκτείνουμε αυτή την f σε μια $\tilde f: \tilde D\to\mathbb{C}$, όταν το $\tilde D\subset\mathbb{C}$ και $\tilde f|_D = f$ έτσι ώστε η επέκταση $\tilde f$ να διατηρεί την ισχύ κάποιας ιδιότητας της f στην $\tilde f$ (συνεχής επέκταση, αναλυτική επέκταση)

SOS 4) Αφού κάθε $z \in D \subset \mathbb{C}$ αντιστοιχεί μοναδικά σε ένα $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ $[z = x+yi = (x,y)]$ και οι τιμές $f(z) \in \mathbb{C}$ μιας $f: D \to \mathbb{C}$ αντιστοιχούν μοναδικά στο $f(z) = \underbrace{\mathrm{Re}f(z)}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{\mathrm{Im}f(z)}_{\in\mathbb{R}} = (\mathrm{Re}f(z), \mathrm{Im}f(z)) \in \mathbb{R}^2$ προκύπτει ότι η f αντιστοιχεί μοναδικά σε ένα διανυσματικό πεδίο στο $D \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathrm{Re}f(x+iy) \\ \mathrm{Im}f(x+iy) \end{pmatrix}$

$\updownarrow$ 1-1, επί αντιστοίχηση

$D \ni z \mapsto f(z) = f(x+iy) = \mathrm{Re}f(x+iy) + i\,\mathrm{Im}f(x+iy)$

Συχνά γράφουμε: $\boxed{f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)}$

Παραδείγματα μιγ. συν. μιγ. μετ.

- $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\exp z = e^z$
  $\exp|_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$ ο περιορισμός της exp στο $\mathbb{R}$
- $\log: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ (με $\log|_{(0,\infty)} = \ln: (0,\infty) \to \mathbb{R}$)
  $\log(x+iy) = \ln|x| + i\,\mathrm{Arg}(x+iy)$. Για $x>0$: $\log(x+i0) = \ln\underbrace{|x|}_{=x} + i\,\underbrace{\mathrm{Arg}(x+i0)}_{=0}$
- $\mathrm{Arg}: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to (-\pi, \pi]$
  $\mathrm{Re}: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \mathrm{Re}\,z$ (συν. πραγμ. μέρους)
  $\mathrm{Im}: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \mathrm{Im}\,z$ (συν. φαντ. μέρους)
  $|\cdot|: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto |z|$ (συν. απολ. τιμής η οποία είναι επέκταση της $|\cdot|: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

Όρια και συνέχεια μιγαδικών συναρτήσεων

Ορισμός: Έστω $D \subset \mathbb{C}$, $f: D \to \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$ σημείο συσσώρευσης του D και $b \in \mathbb{C}$. Τότε λέμε, η f συγκλίνει στο b, όταν το z τείνει στο a (συμβ. $f(z) \to b$ για $z \to a$) αν:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall z \in D: 0 < |z-a| < \delta: |f(z) - b| < \varepsilon \iff$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall z \in D \cap D(a,\delta)\setminus\{a\} \ f(z) \in D(b,\varepsilon)$

$[D(a,\delta) := \{w \in \mathbb{C}: |a-w| < \delta\}$ ανοικτός δίσκος κέντρου a, ακτίνας $\delta]$

Πρόταση: Αν η f συγκλίνει για $z \to a$ τότε έχει μοναδικό όριο b και γράφουμε $\lim_{z \to a} f(z) = b$

Παρασκευή 22/03/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 2η ώρα

<u>Πρόταση</u>: Έστω $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$, a σημείο συσσώρευσης του D. Τότε

$$\lim_{z\to a} f(z) = b \iff \lim_{z\to a}(f(z)-b)=0 \iff \lim_{z\to a}|f(z)-b| = 0 \iff \lim_{w\to 0} f(w+a)=0$$

$$\overset{*}{\iff} \lim_{z\to a} \mathrm{Re} f(z) = \mathrm{Re}\, b \ \wedge\ \lim_{z\to a} \mathrm{Im} f(z) = \mathrm{Im}\, b \iff$$

$$\iff \forall (z_n) \subset D\setminus\{a\}\ z_n \to a: f(z_n) \to b$$

[Εκτός από το αστεράκι (*), όλα τα άλλα αποδ. άμεσα με χρήση του ορισμού και η ισοδυναμία αποδ. με ε-δ ορισμό, όπως στον $\mathbb{R}^2$ ή στην τοπολογία μετρικών χώρων]

(*) Σύμφωνα με την 1-1 και επί αντιστοίχηση $D \subset \mathbb{C}$,

$f: D \to \mathbb{C}$, $z = x+iy \longmapsto f(z) = \underbrace{\mathrm{Re} f(x+iy)}_{u(x,y)} + i\underbrace{\mathrm{Im} f(x+iy)}_{v(x,y)}$ με $D \subset \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix}: D \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re} f(x+iy) \\ \mathrm{Im} f(x+iy)\end{pmatrix}$$

προκύπτει ότι $\lim_{z\to a} f(z) = b \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall (x,y)\in D,\ 0<\|(x,y)-(a_1,a_2)\|<\delta:$

$$\left\| \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2\end{pmatrix}\right\| < \varepsilon, \quad \text{όπου } \begin{matrix} a = a_1 + a_2 \\ b = b_1 + b_2 \end{matrix}$$

$$\iff \boxed{\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2\end{pmatrix}} \iff \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} u(x,y) = b_1 \ \wedge\ \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} v(x,y) = b_2$$

$\boxed{\text{SOS}}$ <u>Πρόταση</u>: $f, g: D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$, a σημείο συσσώρευσης του D. Τότε:

1) $\lim_{z\to a} f(z) = b \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \lim_{z\to a} |f(z)| = |b|$

2) $\lim_{z\to a} f(z) = b$, $\lim_{z\to a} g(z) = c \Rightarrow \lim_{z\to a}(f+g)(z) = b+c$, $\lim_{z\to a}(f\cdot g)(z) = bc$, $\lim_{z\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{b}{c}$, $c\neq 0$

<u>Παραδείγματα</u>:

$\lim_{z\to a} z = a$, $\lim_{z\to a} \mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}\, a$

$\lim_{z\to a} \mathrm{Im}\, z = \mathrm{Im}\, a$, $\lim_{z\to a} \bar{z} = \bar{a}$, $\lim_{z\to a} |z| = |a|$

<u>SOS σχόλιο</u>: Από την $\mathbb{R}$-γραμμικότητα της συνάρτησης του πραγματικού μέρους $\mathrm{Re}: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ [δηλ. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $z, w \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\lambda z + \mu w) = \mathrm{Re}(\underbrace{\lambda \mathrm{Re}\, z + \mu \mathrm{Re}\, w}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{(\lambda \mathrm{Im}\, z + \mu \mathrm{Im}\, w)}_{\in\mathbb{R}})$

Δίδ $Re(\lambda z \pm \mu w) = \lambda Re z + \mu Re w$ $\xrightarrow{}$ $|Re z| \leq |z|$, $|Im z| \leq |z|$

$|Re z - Re a| = |Re(z-a)| \leq |z-a| \Rightarrow \lim_{z\to a} Re z = Re a$

Ανάλογα και τα υπόλοιπα

(2) Άλγεβρα ορίων και παράδειγμα (1) $\Rightarrow \lim_{z\to a} z^n = a^n$ για $a\in\mathbb{C}, n\in\mathbb{N}$

$\lim_{z\to a} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{a^n}$, $a\in\mathbb{C}^*$

$\forall a\in \mathbb{C}\setminus\{0\} = \mathbb{C}^*$, $n,m\in\mathbb{N}$: $\lim_{z\to a} \frac{z^n-a^n}{z^m-a^m} = \frac{n}{m} a^{n-m}$

$\left[z^n - a^n = (z-a)\sum_{k=0}^{n-1} z^k \cdot a^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} z^{k+1} \cdot a^{n-(k+1)} - \sum_{k=0}^{n-1} z^k a^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} z^k a^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} z^k a^{n-k} \right.$

Με την * έχουμε από την άλγεβρα ορίων:

$$\frac{z^n-a^n}{z^m-a^m} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} z^k a^{n-(k+1)}}{\sum_{j=0}^{m-1} z^j a^{m-(j+1)}} \xrightarrow[z\to a]{} \frac{n a^{n-1}}{m a^{m-1}} = \frac{n}{m} a^{n-m}$$

Το όριο $\lim_{z\to 0} \frac{\bar z}{z} \nexists$, αφού $\frac{\bar z}{z} = \frac{\bar z^2}{|z|^2} = \frac{(x-iy)^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2-2xyi}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - i\frac{2xy}{x^2+y^2}$

sos

και τα όρια $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \nexists$ και $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-2xy}{x^2+y^2} \nexists$

Ορισμός: Έστω $D\subset\mathbb{C}$ και $f: D\to\mathbb{C}$, τότε λέμε ότι η f τείνει στο ∞,

a) Αν $a\in\mathbb{C}$ σημ. συσ. του D, τότε λέμε ότι η f τείνει στο ∞ όταν το z τείνει στο a αν:

$\forall r>0\ \exists \delta>0\ \forall z\in D,\ 0<|z-a|<\delta: |f(z)|>r$

Συμβολισμός: $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$

β) Αν το D είναι μη φραγμένο, τότε λέμε η f συγκλίνει στο b όταν το z τείνει στο ∞ αν:

$\forall \varepsilon>0\ \exists r>0\ \forall z\in D,\ |z|>r: |f(z)-b|<\varepsilon$

Συμβολισμός: $\lim_{z\to\infty} f(z) = b$

γ) Αν το D είναι μη φραγμένο, τότε λέμε η f τείνει στο ∞ όταν το z τείνει στο ∞ αν:

$\forall r>0\ \exists \rho>0\ \underbrace{\forall z\in D,\ |z|>\rho}_{\Leftrightarrow\ \forall z\in D\cap D(\infty,\rho)}: |f(z)|>r$, όπου $D(\infty,\rho) = \{z\in\mathbb{C}: |z|>\rho\}$

↳ Μπορούμε να το δούμε σαν τον ανοικτό κύκλο κέντρου ∞ και ακτίνας ρ (χωρίς το ∞)

Συμβολισμός: $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$

Παρασκευή 22/03/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 3η ώρα

<u>Πρόταση:</u> $\lim_{z\to a} f(z) = \infty \iff \forall\ (z_n) \subset D\setminus\{a\},\ z_n \to a : f(z_n) \to \infty$

$\lim_{z\to\infty} f(z) = b \iff \forall\ (z_n) \subset D,\ z_n \to \infty : f(z_n) \to b$

$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \iff \forall\ (z_n) \subset D,\ z_n \to \infty : f(z_n) \to \infty$

Να δω ασκήσεις Α.37 - Α.40

<u>Συνέχεια συναρτήσεων</u>

<u>Ορισμός:</u> Η $f : D \to \mathbb{C}$, $D \in \mathbb{C}$, ονομάζεται

α) συνεχής στο $a \in D$, αν $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in D, |z-a| < \delta : |f(z) - f(a)| < \varepsilon$

β) συνεχής στο $E \subset D$, αν συνεχής σε κάθε $z \in E$ ($\neq f|_E$ συνεχής)

γ) συνεχής, αν είναι συνεχής στο $D \iff$ αν είναι συνεχής σε κάθε $a \in D$

<u>Πρόταση:</u> 1) f συνεχής στο $a \iff \forall\ (z_n) \subset D,\ z_n \to a : f(z_n) \to f(a)$

2) a σημ. συσ. του D: f συνεχής στο $a \in D \iff \lim_{z\to a} f(z) = f(a)$

3) f συνεχής στο $E \subset D \Rightarrow f|_E$ συνεχής

<u>πχ</u> $f(z) = \begin{cases} 1, & z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \\ 0, & z \in \mathbb{R} \end{cases} \ \not\Leftarrow\ f|_{\mathbb{R}}$ συνεχής αλλά $f : D \to \mathbb{C}$ όχι συνεχής στο E αφού όχι συνεχής σε $x \in \mathbb{R}$

4) $f, g : D \to \mathbb{C}$ συνεχής στο $a \Rightarrow f \pm g,\ f \cdot g,\ \frac{f}{g}\ (g \neq 0)$ συνεχής στο a

5) f συνεχής $\iff \forall E \subset \mathbb{C}$ ανοικτό: $f^{-1}(E) \subset D$ ανοικτό

6) D συμπαγές, $D \subset \mathbb{C}$, f συνεχής $\Rightarrow f(D) \subset \mathbb{C}$ συμπαγές, ($f : D \to \mathbb{R}$ με $D \subset \mathbb{C}$ συμπ.)

7) D συμπαγές, $D \subset \mathbb{C}$, f συνεχής $\Rightarrow f$ ομοιόμορφα συνεχής

8) σύνθεση συνεχών είναι συνεχής

SOS 9) $D \subset \mathbb{C}$, f συνεχής στο $a \iff \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : D \to \mathbb{R}^2,\ D \subset \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re} f(x+iy) \\ \mathrm{Im} f(x+iy) \end{pmatrix}$ είναι συνεχής στο $(\mathrm{Re}\, a, \mathrm{Im}\, a) \in D$

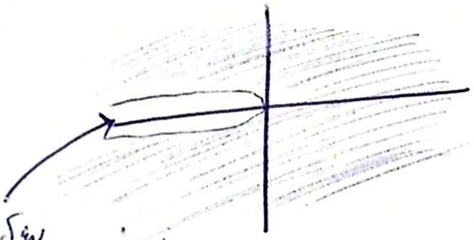
Παραδείγματα:

1) $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ συνεχής: $e^z = e^{Rez + i Imz} = e^{Rez} \cdot e^{i Imz} = e^{Rez}(\cos(Imz) + i\sin(Imz))$ είναι συνεχής

και $Re, Im : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$

(άλγεβρα συνεχών, σύνθεση συνεχών
$\cos, \sin, \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς)

2) $\boxed{\text{Super Sos}}$ $Arg : \mathbb{C}^* \to (-\pi, \pi]$ είναι συνεχής στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ως κλάδος πολύκλαδης συνάρτησης αλλά ασυνεχής σε κάθε $x \in (-\infty, 0]$



Εδώ δεν μπορώ να πάρω ολοκληρώματα

Το άλλο Σάββατο 10:00-14:00 αναπλήρωση

Πέμπτη 28/03/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 1η ώρα

Συνέχεια Συναρτήσεων

Η $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ συνεχής στο $a \in D \iff$

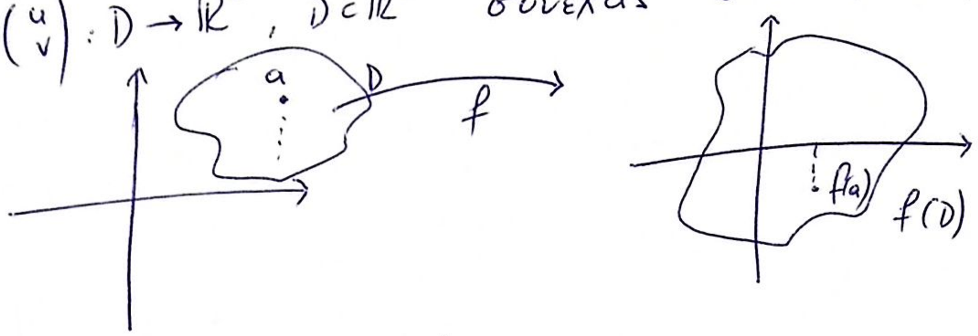
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall z \in D \cdot |z-a| < \delta : |f(z) - f(a)| < \varepsilon \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall z \in D(a, \delta) : f(z) \in D(f(a), \varepsilon) \iff$

$\forall (z_n) \subset D$, $z_n \to a$ $f(z_n) \to f(a) \iff$

$\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : D \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $a \iff$

$\binom{u}{v} : D \to \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$ συνεχείς στο (a_1, a_2) $[a = a_1 + i a_2]$



Παρατήρηση: Η έννοια της συνέχειας μιας μιγαδικής συνάρτησης είναι επέκταση της έννοιας μιας πραγματικής συνάρτησης

Ιδιαίτερα σημαντικά εργαλεία στην πράξη

1) Άλγεβρα συνεχών συναρτήσεων

f, g συνεχείς $\Rightarrow f+g,\ f \cdot g,\ \dfrac{f}{g}\ (g(a) \neq 0)$

2) Σύνθεση συνεχών είναι συνεχής

Σημαντικά παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων

1) ταυτοτική $(z \mapsto z)$

συζυγούς $(z \mapsto \bar{z})$

φανταστικού μέρους $(z \mapsto \operatorname{Im} z)$

πραγματικού μέρους $(z \mapsto \operatorname{Re} z)$

απόλυτης τιμής $(z \mapsto |z|)$

πολυώνυμα του z

ρητές του z (όπου ορίζονται)

και όλες οι συναρτήσεις που προκύπτουν από τις ~~...~~ προηγούμενες μέσω άλγεβρας και σύνθεση συνεχών

2) εκθετική $z \longmapsto e^z = e^{\mathrm{Re}z} \cdot e^{i\,\mathrm{Im}z} = e^{\mathrm{Re}z}(\cos(\mathrm{Re}z) + i\sin(\mathrm{Im}z))$

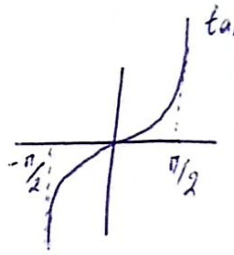
[προφανώς χρησιμοποιούμε και τις ιδιότητες συνεχών πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής]

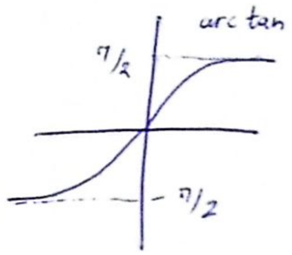
3) $\boxed{\text{SOS}}$ Η συνάρτηση του κύριου ορίσματος $\mathrm{Arg}: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to (-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$ και ασυνεχής στα $x \in (-\infty, 0]$

Είχαμε ορίσει 1-1 και επί από το $\underbrace{\mathbb{C}\setminus\{0\}}_{\text{καρτ.}}$ στο $\underbrace{(0,\infty)\times(-\pi,\pi]}_{\text{πολικές}}$ τον μετασχηματισμό από καρτεσιανές σε πολικές

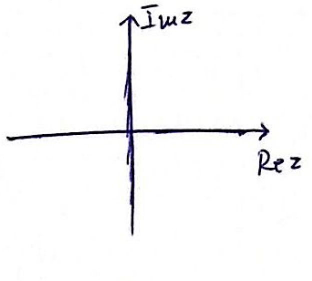
$(x,y) \longmapsto (r,\phi)$ μέσω της:

$$\phi = \mathrm{Arg}(x+iy) = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & x>0 \\ \pi/2, & x=0,\ y>0 \\ \pi + \arctan\frac{y}{x}, & x<0,\ y\geq 0 \\ -\pi/2, & x=0,\ y<0 \\ -\pi + \arctan\frac{y}{x}, & x<0,\ y<0 \end{cases}$$





Πράγματι, από τη συνέχεια της $\arctan: \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ και άλγεβρα συνεχών πραγματικών συνεχών έχουμε ότι η $z \longmapsto \mathrm{Arg}z$ είναι συνεχής στο δεξί ανοικτό ημιεπίπεδο στο δεύτερο και στο τρίτο (ανοικτό) τεταρτημόριο. Όμως, στο σημείο $iy_0 \in \{z \in \mathbb{C}:$



$\mathrm{Re}z = 0,\ \mathrm{Im}z > 0\}$ (ανοικτός θετικός ημιάξονας φανταστικών)

έχουμε για $z_n = x_n + iy_n \to iy_0 \iff x_n \to 0 \wedge y_n \to y_0$ με $y_n > 0$ $\forall n \geq n_0$ και κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq |\mathrm{Arg}(z_n) - \mathrm{Arg}(iy_0)| = \begin{cases} \left|\arctan\frac{y_n}{x_n} - \frac{\pi}{2}\right|, & x_n > 0 \\ 0, & x_n = 0 \\ \left|\pi + \arctan\frac{y}{x} - \frac{\pi}{2}\right|, & x_n < 0 \end{cases} = \begin{cases} \left|\pi/2 - \arctan\frac{y_n}{|x_n|}\right|, & x_n \neq 0 \\ 0, & x_n = 0 \end{cases}$$

$$< \pi/2 - \arctan\frac{y_n}{\frac{1}{n} + |x_n|} \quad \forall n \geq n_0 \longrightarrow 0$$

(μεγάλωσα τον παρονομαστή
μίκρυνα το κλάσμα
arctan ↗, άρα μίκρυνα το arctan
επειδή έχει μείον μπροστά μεγάλωσα την ποσότητα)

Άρα, $\mathrm{Arg}: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to (-\pi, \pi]$ είναι συνεχής σε σημεία $iy_0,\ y_0 > 0$ και με ανάλογη απόδειξη συνεχής σε σημεία $iy_0,\ y_0 < 0$

Πέμπτη 28/03/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 2η ώρα

Όμως, για $z_0 = x_0 < 0$ η $\mathrm{Arg}: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to (-\pi, \pi]$ δεν είναι συνεχής, αφού για $x<0$: $\mathrm{Arg}(x+iy) = \begin{cases} \pi + \arctan\frac{y}{x}, & y \geq 0 \\ -\pi + \arctan\frac{y}{x}, & y<0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ για $z_n = x_n + i\underbrace{y_n}_{\geq 0} \to x_0 < 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_n \to x_0 \wedge y_n \to 0$

Έχουμε $\mathrm{Arg} z_n \to \pi = \mathrm{Arg}(x_0)$ ενώ για $z_n = x_n + i\underbrace{y_n}_{<0} \to x_0 \Leftrightarrow x_n \to x_0 \wedge y_n \to 0$

Έχουμε $\mathrm{Arg}\, z_n \to -\pi \neq \mathrm{Arg}(x_0)$

Συνέπειες: (1) Περνώντας από το δεύτερο τεταρτημόριο στο τρίτο, βλέπουμε ότι η Arg παρουσιάζει «άλμα» κατά -2π

$\left(\mathrm{Arg}\left(x_0 + i\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{Arg}(x_0) = \pi$

$\left(\mathrm{Arg}\left(x_0 - i\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\pi$

Αν θέλαμε να το διορθώσουμε (δηλ. να περνάμε από τον αρν. ημιάξ. και πραγμ. χωρίς «άλμα») θα μπορέσουμε να ορίσουμε τη συνάρτηση $f(z) = \begin{cases} \mathrm{Arg} z, & \mathrm{Im} z \geq 0 \\ \mathrm{Arg} z + 2\pi, & \mathrm{Im} z < 0 \end{cases}$ η οποία στο $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z < 0\}$ είναι συνεχής $\Rightarrow$ δηλ. έχουμε συνεχή επέκταση της Argz στο αριστερό ημιεπ. «πάνω» ή «πέρα» από τον αρν. ημιάξ. των πραγμ. $\Rightarrow$ μπορούμε από το τρίτο στο τέταρτ. στο πρώτο στο δεύτερο τεταρτημόριο κατά συνεχή τρόπο με την $\mathrm{Arg}z + 2\pi$ αλλά τότε $\mathrm{Arg} z_n + 2\pi \to 3\pi$ για $z_n \to x_0 < 0$ με $\mathrm{Im} z_n > 0 \Rightarrow$ συνεχίζοντας έτσι, μπορούμε να έχουμε συνεχή συνάρτηση στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ αλλά αυτή θα είναι πλειονότιμη ή πολύκλαδη.

$\arg: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \prod_{k\in\mathbb{Z}} \left((-\pi,\pi] + 2k\pi\right)$, $\arg z := \left\{\arg_k z := \mathrm{Arg} z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$

όπου $\arg_k : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to (-\pi,\pi] + 2k\pi$ είναι οι διάφοροι κλάδοι της πολύκλαδης συνάρτησης του ορίσματος arg (χωρίς k) με $\arg_0 = \mathrm{Arg}$

(2) Η $\mathrm{Arg}: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to (-\pi, \pi]$ είναι, προφανώς, φραγμένη (και επί) και ότι $\mathrm{Arg}(\rho \cdot e^{i\theta}) = \theta$, $\rho > 0$, $\theta \in (-\pi, \pi]$ $\Rightarrow$ $\forall \theta \in (-\pi, \pi]$ $\Rightarrow$ για $z_n = \rho_n e^{i\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ($\Leftrightarrow \rho_n \to 0$) έχουμε $\mathrm{Arg} z_n = \theta \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$ $\Rightarrow$ η Arg «παίρνει» οριακά, ανάλογα με την ακτίνα, πάνω στην οποία κινούμαι κάθε τιμή $\theta \in (-\pi, \pi]$ για $z_n \to 0$

Παρασκευή 29/03/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 1η ώρα

<u>Παράδειγμα:</u> Η λογαριθμική συνάρτηση $\log: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $\log z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg} z \Rightarrow$ log είναι συνεχής στο $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ και ασυνεχής $\forall x \in (-\infty,0)$ $\Rightarrow$ (πάλι, άλμα του φανταστικού μέρους) και για $\underset{\neq 0}{z_n} \to 0$ έχουμε $\log z_n \to \infty$

<u>Παράδειγμα:</u> Η συνάρτηση της λ-δύναμης $z \mapsto z^{\lambda} = e^{\lambda \log z}$, $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$; $\lambda \in \mathbb{C} \underset{\text{παραδ.}}{\overset{\text{προηγ.}}{\Longrightarrow}}$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ και γενικά ασυνεχής $\forall x \in (-\infty,0)$.

Όμως για επιλεγμένα/συγκεκριμένα $\lambda \in \mathbb{C}$ η συνάρτηση μπορεί να επεκτείνεται συνεχώς σε όλο το $\mathbb{C}$, π.χ. για $\lambda = n \in \mathbb{N}_0$ ή σε όλο το $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, π.χ. για $\lambda = -n$, $n \in \mathbb{N}$ [αφού βλ. προηγ. παραδ. ή άλγεβρα συνεχών συναρτήσεων η $z \mapsto z^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, είναι συνεχής στο $\mathbb{C}$ και η $z \mapsto \frac{1}{z^n}$; $n \in \mathbb{N}$, είναι συνεχής στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$]

Γιατί συμβαίνει αυτό; Γιατί δεν ισχύει για $\lambda \neq \pm n$, $n \in \mathbb{N}$;

Ας δούμε τι γίνεται με τη συνάρτηση.

$z \mapsto \sqrt{z} = \sqrt{|z|} \cdot e^{i\frac{\mathrm{Arg} z}{2}}$, $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\sqrt{0} = 0$. Σίγουρα συνεχής στο $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ (λόγω της συνέχειας της $\sqrt{\cdot} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$).

Επίσης, συνεχής στο 0 αφού για $z_n \to 0 \Leftrightarrow |z_n| \to 0 \Leftrightarrow |\sqrt{z_n}| = \sqrt{|z_n|} \to 0$. Όμως, για $x \in (-\infty,0)$ η συνάρτηση δεν είναι συνεχής, αφού για $z_n = x \pm \frac{i}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $z_n \to x$ και $\sqrt{z_n} = \left(x^2 + \frac{1}{n^2}\right)^{1/4} e^{\frac{i\,\mathrm{Arg}(x \pm i/n)}{2}}$ $\xrightarrow[n\to\infty]{\text{π.χ.}}$ $\sqrt{|x|}\, e^{i \pm \frac{\pi}{2}} = \pm i \sqrt{|x|}$

[ενώ για $z^1 = |z| e^{i\frac{\mathrm{Arg} z}{1}} \xrightarrow[z_n \to x \in (-\infty,0)]{} |x| \cdot e^{\underbrace{i \pm \pi}_{\text{ίδιο}}}$ διαφ]

Συνεπώς, πχ για $\lambda = 1/2$, «χαλάει» η 2π-περιοδικότητα της e^{iy} ενώ για $\lambda = n \in \mathbb{N}_0$, δεν «χαλάει»

<u>Παρατήρηση:</u> Σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα, όπου υπήρχε ασυνέχεια, αυτή ήταν στο $(-\infty,0]$. Αυτό οφείλεται στον μονοσήμαντο ορισμό του (κύριου) ορίσματος (δηλ. στην κατασκευή μιας 1-1 και επί απεικόνισης από το $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ στο $(0,\infty) \times (-\pi,\pi]$ το οποίο οδηγεί στην ασυνέχεια του κύριου ορίσματος Arg (όπως το ορίσαμε, προσπαθώντας να διατηρήσω τη συνέχεια του σε όσο μεγαλύτερο τμήμα του $\mathbb{C}$ μπορούμε στο $(-\infty,0)$. Αν ορίζαμε μονοσήμαντα $(x,y) \longleftrightarrow (r,\phi)$, $\phi \in [0,2\pi)$ το ίδιο πρόβλημα θα υπήρχε (ασυνέχεια της ϕ) στο $(0,\infty)$

Περί της «μοναδικότητας» του απείρου ∞ (και στερεογραφική προβολή)

Είπαμε ότι $z_n \xrightarrow[\mathbb{C}]{} \infty :\iff \forall r>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0: \underbrace{|z|>r} \iff$

$\underbrace{|z_n|} \to +\infty \iff$ $\qquad$ $\iff z_n\in D(\infty,r)=\{z\in\mathbb{C}: |z|>r\} =$

$\iff \dfrac{1}{|z_n|} \xrightarrow{\in\mathbb{R}} 0 \iff$ $\qquad$ $= \{z\in\tilde{\mathbb{C}}\setminus\{\infty\}: |z|>r\}$

$z_n\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$

$\iff \boxed{\dfrac{1}{z_n} \to 0}$

$\tilde{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ «τρύπιος» κυκλικός δίσκος με κέντρο ∞

2) Στο $\mathbb{R}$ έχουμε $+\infty, -\infty$ με $x_n\to+\infty \iff \forall r>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0 : x_n>r$

$x_n\to-\infty \iff \forall r>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0 : x_n<-r$

Παρατήρηση: Αν $x_n\to+\infty$, $y_n\to-\infty$ τότε $|x_n-y_n| = x_n-y_n \to +\infty$

Αντίστοιχα: Αν $z_n=n$ και $w_n=-n$ τότε $z_n\to\infty$ και $w_n\to\infty$ (στο $\mathbb{C}$)

όπου, επίσης, $|z_n-w_n| = 2n \to +\infty$

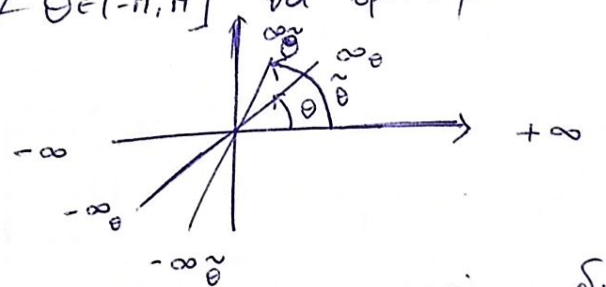
Άρα, τι συμβαίνει για δύο ακολουθίες στο $\mathbb{C}$ που η Ευκλείδια απόσταση των όρων τους μεγαλώνει, τελικά «πάνε» στο ίδιο «όριο», το ∞;

[Θα μπορούσαμε πράγματι $\forall\, \theta\in(-\pi,\pi]$ να ορίσουμε $z_n\to\infty_\theta$

πχ για $\theta=0$, $\infty_\theta=+\infty$

για $\theta=-\pi$, $\infty_{-\pi}=-\infty$

ως $e^{i(\operatorname{Arg} z_n-\theta)}\to 1$ και $|z_n|\to+\infty$



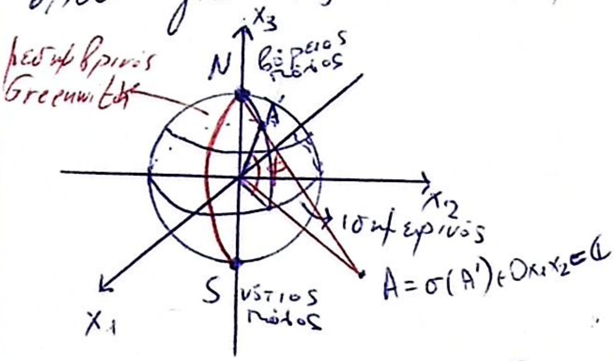
Αυτή η μη χρησιμοποιούμενη έννοια του απείρου είναι διαισθητική σύμβαση με την Ευκλείδια μετρική στο $\mathbb{C}$.]

Η έννοια του ∞, ως κατ' εκδοχή σημείου του επεκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου $\tilde{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ προκύπτει μέσω της στερεογραφικής προβολής.

Χρησιμοποιείται στη γεωγραφία, χαρτογραφία, αστρονομία. Καλύτερα ορίζεται με τις γεωγραφικές συντεταγμένες.

Παρασκευή 29/03/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 2η ώρα - 3η ώρα

Θεωρούμε μια σφαίρα $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ με ακτίνα 1 και κέντρο $O(0,0,0)$ όπου για $x_3 = 0$ έχουμε το μιγαδικό επίπεδο.



Η σφαίρα αυτή (λέγεται και σφαίρα του Riemann) αντιστοιχεί στην επιφάνεια της γης. Κάθε $A' \in S^2 \setminus \{N\}$ ορίζεται από το γεωγραφικό μήκος $\lambda \in (-\pi, \pi]$.

[για $\lambda = 0$ ορίζεται η τομή του επιπέδου $(1,0,0)$, O, N ως μεσημβρινός Greenwich
για $\lambda = \pi$ η International Date Line.

Η τομή του επιπέδου παράλληλο στο Ox_1x_2 που περιέχει το A' καθορίζει τη γωνία (προσανατολισμό) $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$ μεταξύ του επιπέδου Ox_1x_2 και του διανύσματος $\vec{OA'}$ και ονομάζεται γεωγραφικό πλάτος.

[για $\phi = 0$ ισημερινός, για $\phi = \frac{\pi}{2}$ βόρειος πόλος, για $\phi = -\pi/2$ νότιος πόλος]

Αν το επίπεδο του ισημερινού $Ox_1x_2 = \mathbb{C}$, τότε,

$\forall A' \in S \setminus \{N\} \ \exists! \ A = \sigma(A') \in \mathbb{C}$

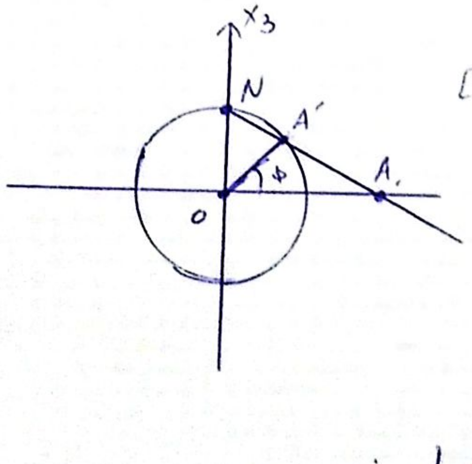
στερεογραφική προβολή

<u>Δηλαδή:</u> Έστω $A' \in S^2 \setminus \{N, S\}$. Τότε $\exists \ (\phi, \lambda) \in (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi, \pi]$ και $\sigma(A') = A = r \cdot e^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ με $(r, \theta) \in (0, \infty) \times (-\pi, \pi]$.

Ισχύει $\lambda = \theta$. Αυτή η απεικόνιση είναι 1-1 και επί από τη σφαίρα στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Πως προκύπτει η σχέση του r με το ϕ; Ας δούμε την τομή της σφαίρας με το ημιεπίπεδο που περιέχει τον μεσημβρινό $\lambda = \theta$. Αυτό το ημιεπίπεδο περιέχει και την ημιευθεία $NA'A$ ($\Rightarrow \lambda = \theta$).

Η τομή είναι

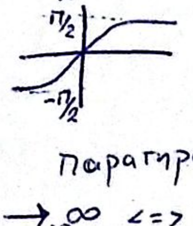


[πάνω στο ημιεπίπεδο $\lambda = \theta$]

$\tan a = \frac{r}{1}$, όπου $\pi/2 - \phi + 2a = \pi \Rightarrow a = \pi/4 + \phi/2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \tan(\pi/4 + \phi/2) \Leftrightarrow 2\arctan r - \frac{\pi}{2} = \phi$,

όπου $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$



Με αυτήν την αντιστοίχηση παρατηρούμε ότι:

Για $(z_n) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ με $\underset{r_n e^{i\theta_n}}{z_n} \to \infty \Leftrightarrow r_n = |z_n| \to +\infty$ αντιστοιχεί μια ακολουθία σημείων πάνω στη σφαίρα που τείνει στο N

$(\phi_n,\lambda_n)\in(-\pi/2,\pi/2)\times(-\pi,\pi]$ με $\phi_n = 2\arctan r_n - \pi/2 \to \pi/2$ και αντίστροφα, αν $\phi_n\in(-\pi/2,\pi/2)$ με $\phi_n\to\frac{\pi}{2}$ τότε για την εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο της (ϕ_n) έχουμε $0<r_n=\tan(\pi/4+\phi_n/2)\to+\infty$

=> Μέσω της στερεογραφικής προβολής σ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε κατά συνεχή τρόπο τον Βόρειο πόλο $N\in S^2$ με το $\infty\in\tilde{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ και να επεκτείνουμε τη στερεογραφική προβολή στην $\sigma: S^2\to\tilde{\mathbb{C}}$ με $\sigma(S^2\setminus\{N\})=\mathbb{C}$ και $\sigma(N)=\infty$

Αυτό έχει τοπολογικές και γεωμετρικές συνέπειες, π.χ. επιτρέπει να ορίσουμε μετρική στο $\tilde{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ ως

$$|A-B|_{\tilde{\mathbb{C}}} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Ευκλείδια μετρική στον } \mathbb{R}^3}}{\|}\underbrace{\sigma^{-1}(A)}_{A'}-\underbrace{\sigma^{-1}(B)}_{B'}\|$$

(χορδική απόσταση) επεκτ. στο ∞ με

$$|A-\infty| = \|A'-N\|.$$

Μέσω της σ, σημεία στο νότιο ημισφαίριο $(\phi<0)$ αντιστοιχούν σε σημεία στο εσωτερικό του μοναδιαίου κυκλικού δίσκου στο $\mathbb{C}$ και σημεία στο Βόρειο $(\phi>0)$ σε σημεία στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου αντιστοιχούν στον ισημερινό.

Αν απεικονίσουμε τη σφαίρα στον εαυτό της μέσω κατοπτρισμού στο επίπεδο του ισημερινού (μιγ. επ.), δηλ. $(\phi,\lambda)\mapsto(-\phi,\lambda)$ αυτή στο μιγ. επ. αντιστοιχεί στην απεικόνιση η οποία με τη σειρά της απεικονίζει το εσωτερικό στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου και αντίστροφα αφού

$$z\mapsto\frac{1}{\bar z}=\frac{z}{|z|^2}$$

$$\left|\frac{z}{|z|^2}\right| = \left|\frac{1}{\bar z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

Η πιο πάνω αντιστοίχιση της $(\phi,\lambda)\mapsto(-\phi,\lambda)$ με την $z\mapsto\frac{1}{\bar z}$ προκύπτει ως εξής:

(ϕ,λ) αντιστοιχεί στο $z=re^{i\theta}$ $(\theta=\lambda, r=\tan(\pi/4+\phi/2))$

$(-\phi,\lambda)$ αντιστοιχεί στο $w=\rho\cdot e^{i\theta}$ $(\theta=\lambda, \rho=\tan(\pi/4-\phi/2))$

όπου $\tan(\pi/4+\beta) = \tan(\pi/4-\beta)=1$ και συνεπώς

$$w\bar z = \underbrace{\tan(\pi/4-\phi/2)}_{|w|}\underbrace{\tan(\pi/4+\phi/2)}_{|\bar z|}\underbrace{e^{i\theta}}_{\arg w}\cdot\underbrace{e^{-i\theta}}_{\arg \bar z}=1 \Rightarrow w=\frac{1}{\bar z}$$

Σάββατο 30/03/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 1η ώρα

Κεφάλαιο 3: Ολόμορφες Συναρτήσεις

Ορισμός: Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και $z_0 \in D$. Η $f: D \to \mathbb{C}$ ονομάζεται μιγαδικά διαφορίσιμη στο z_0 (ή για συντομία $\mathbb{C}$-διαφορίσιμη στο z_0) αν υπάρχει το όριο $f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ το οποίο, ονομάζεται μιγαδική παράγωγος της f στο z_0 (ή $\mathbb{C}$-παράγωγος στο z_0)

Αν η f είναι $\mathbb{C}$-διαφορίσιμη σε καθε $z_0 \in D$, τότε η $f: D \to \mathbb{C}$ ονομάζεται ολόμορφη.

Αν η $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, τότε η $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ονομάζεται ακέραια (entire function)

Παραδείγματα: 1) $f(z) = c$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ σταθερά

$\forall z_0 \in \mathbb{C}$: $f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{c-c}{z-z_0} = 0$

Η σταθερή είναι ακέραια με παράγωγο $f'(z) = 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$

2) Η ταυτοτική $f(z) = z$ $\forall z \in \mathbb{C}$

$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z-z_0}{z-z_0} = 1$ $\forall z_0 \in \mathbb{C}$

Η ταυτοτική είναι ακέραια με παράγωγο $f'(z_0) = 1$ $\forall z \in \mathbb{C}$

3) $\forall n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ η $f(z) = z^n$ $\forall z \in \mathbb{C}$ είναι ακέραια αφού για καθε $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0}$

[έχουμε δει $\lim_{z \to a} \frac{z^n - a^n}{z^m - a^m} = \frac{n}{m} a^{n-m}$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n,m \in \mathbb{N}$]

Εδώ έχουμε την περίπτωση $m=1$

Άρα $f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} = n \cdot z_0^{n-1}$

[για $z_0 = 0$: $\lim_{z \to 0} \frac{z^n}{z} = \lim_{z \to 0} z^{n-1} = \begin{cases} 0, & n \geq 2 \\ 1, & n = 1 \end{cases}$]

Για να καταλάβουμε τη σχέση μεταξύ μιας $f : D \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-διαφορισιμότητας στο $z_0 \in D$ και την $\mathbb{R}$-διαφορισιμότητα του αντίστοιχου διανυσματικού πεδίου $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : D \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(x+iy) \\ \operatorname{Im} f(x+iy) \end{pmatrix}$, $(x,y) \in D$,

[$f(x+iy) = \operatorname{Re} f(x+iy) + i \operatorname{Im} f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$]

θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο απλό λήμμα.

<u>Λήμμα</u>: Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $z_0 \in D$. Η $f : D \to \mathbb{C}$ είναι $\mathbb{C}$-διαφορίσιμη στο z_0

$\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{C} : \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0)}{z - z_0} = 0$ (2)

και, τότε, (αν ισχύει ο 2ος ισχυρισμός) το λ είναι μοναδικό και $\lambda = f'(z_0)$

<u>Απόδειξη</u>: $(\Rightarrow)$ Έχουμε $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = 0 \Rightarrow$ για $\lambda = f'(z_0)$ ισχύει ο (2)

$(\Leftarrow)$

Αν $\exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ με την ιδιότητα (2) $\Rightarrow \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0) + \lambda(z - z_0)}{z - z_0}$

$= 0 + \lambda \Rightarrow \lambda = f'(z_0)$

<u>Ορισμός</u>: Μια μιγαδική συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ονομάζεται $\mathbb{C}$-γραμμική αν έχει τη μορφή $z \mapsto \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{C}$ σταθερά

[εξ ορισμού $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$-γραμμική, αν $\forall\, \lambda, \mu, z, w \in \mathbb{C}$
$f(\lambda z + \mu w) = \lambda f(z) + \mu f(w) \Rightarrow f(\lambda) = \lambda \cdot f(1)\ \forall \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow f(z) = f(1) \cdot z\ \forall z \in \mathbb{C}$]

Η $\mathbb{C}$-γραμμική συνάρτηση $\underset{x+iy}{\overset{\shortparallel}{z}} \mapsto \underset{\lambda_1 + i\lambda_2}{\lambda} z$, $\lambda, z \in \mathbb{C}$ αντιστοιχεί μοναδικά στο διανυσματικό πεδίο $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\lambda_1 + i\lambda_2)(x+iy) \\ \operatorname{Im}(\lambda_1 + i\lambda_2)(x+iy) \end{pmatrix}$ όπου

πίνακας 2x2

$\lambda z = (\lambda_1 + i\lambda_2)(x+iy) = \lambda_1 x - \lambda_2 y + i(\lambda_2 x + \lambda_1 y) = \begin{pmatrix} \lambda_1 x - \lambda_2 y \\ \lambda_2 x + \lambda_1 y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}}_{\Lambda} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Είδαμε ότι $\mathbb{C}$-γραμμική $f(z) = \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ αντιστοιχεί στο διανυσματικό πεδίο

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ με $z = x+iy$, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$. Από τα προηγούμενα

[1) αντιστοίχηση μιας $f : D \to \mathbb{C}$ σε ένα διαν. πεδίο, 2) λήμμα, 3) $z \mapsto \lambda z$ αντιστοιχεί $\begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

(συνέχεια στην επόμενη)

Σάββατο 30/03/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 2η ώρα

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)-\lambda(z-z_0)}{z-z_0}=0 \iff \lim_{z\to z_0}\frac{|f(z)-f(z_0)-\lambda(z-z_0)|}{|z-z_0|}=0 \iff \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)-\lambda(z-z_0)}{|z-z_0|}=0$$

$\iff \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{\binom{u}{v}(x,y)-\binom{u}{v}(x_0,y_0)-A\binom{x-x_0}{y-y_0}}{\|(x-x_0,y-y_0)\|}=0 \iff \binom{u}{v}:D\to\mathbb{R}^2$ διαφορίσιμο στο

(x_0,y_0) με παράγωγο $\begin{pmatrix}u_x&u_y\\v_x&v_y\end{pmatrix}(x_0,y_0)=A=\begin{pmatrix}\lambda_1&-\lambda_2\\\lambda_2&\lambda_1\end{pmatrix}\binom{x}{y}\in D\subset\mathbb{R}^2$

SOS **Θεώρημα**: Η μιγαδική συνάρτηση $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ με $u,v:D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}^2$ ανοικτό, είναι $\mathbb{C}$-διαφορίσιμη στο $z_0=x_0+iy_0\in D\subset\mathbb{C}$ $\iff$ οι u,v είναι $\mathbb{R}$-διαφορίσιμες στο $(x_0,y_0)\in D\subset\mathbb{R}^2$ και ισχύουν εκεί οι εξισώσεις Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0)=-u_y(x_0,y_0) \end{cases}$$

Επίσης, από το Λήμμα έχουμε $f'(z_0)=\lambda=\lambda_1+i\lambda_2=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)= \; =:$

$=: f_x(x_0+iy_0)=\dfrac{\partial}{\partial x}f(x_0+iy_0)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)\right)$ ή

$f'(z_0)=v_y(x_0,y_0)+i(-u_y(x_0,y_0))=-i\left(u_y(x_0,y_0)+iv_y(x_0,y_0)\right)=-if_y(x_0+iy_0)$

$$\boxed{f'(z_0)=f_x(x_0+iy_0)=-if_y(x_0+iy_0)}$$

SOS **Παρατήρηση/Παράδειγμα**: Τι συμβαίνει για $\mathbb{R}$-γραμμικά διανυσματικά πεδία στο $\mathbb{R}^2$; Ποια αντιστοιχούν σε $\mathbb{C}$-διαφ. μιγ. συν;

Κάθε $\mathbb{R}$-γραμμικό διαν. πεδίο $\binom{u}{v}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ είναι της μορφής $\binom{u}{v}(x,y)=\begin{pmatrix}a&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\binom{x}{y}$, $a,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, όλα αυτά είναι $\mathbb{R}$-διαφορίσιμα με παράγωγο $D\binom{u}{v}(x,y)=\begin{pmatrix}a&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$.

[Σύμφωνα με Θ.C.R. από όλα αυτά (δηλ. από όλα τα $\mathbb{R}$-γραμμικά διαν. πεδία) αντιστοιχούν σε $\mathbb{C}$-διαφ. (ακέραιες) μιγ. συν. μόνο αυτά με $a=\delta$, $\gamma=-\beta$.]

Αυτό αντιστοιχεί σε μια μιγ. συν. $f(\underbrace{x+iy}_{z})=(ax+\beta y)+i(\gamma x+\delta y)=\underbrace{(a+i\gamma)}_{a}x+\underbrace{(\beta+i\delta)}_{b}y$
$=a+ib$

$x=\frac{z+\bar z}{2}$, $y=\frac{z-\bar z}{2i}$ $\Big\}$ $\Rightarrow f(x+iy) = a\frac{z+\bar z}{2} + b\frac{z-\bar z}{2i} = \underbrace{\tfrac12(a-ib)}_{=:\lambda} z + \underbrace{\tfrac12(a+ib)}_{=:\mu}\bar z$

Συνεπώς, όλα τα ℝ-γραμμικά διαν. πεδία αντιστοιχούν 1-1 και επί με μιγ. συν. της μορφής $f(z)=\lambda z+\mu\bar z$, $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ οι οποίες για αυτό ονομάζονται ℝ-γραμμικές μιγ. συν. και οι ℂ-γραμμικές $f(z)=\lambda z$ είναι η ειδική περίπτωση με $\mu=0$

Το $\mu=0 \Leftrightarrow a=-ib \Leftrightarrow \alpha+i\gamma=-i\beta+\delta \Leftrightarrow \alpha=\delta \wedge \gamma=-\beta$

<u>Συνεπώς,</u> οι ℂ-γραμμικές αντιστοιχούν σε ℝ-γραμμικά διαν. πεδία

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & -\gamma\\ \gamma & \alpha\end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{SOS}}$ Σύμφωνα με το Θ. C.R. από όλες τις ℝ-γραμμικές μιγ. συν. $f(z)=\lambda z+\mu\bar z$, $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ μόνο οι ℂ-γραμμικές $f(z)=\lambda z$ είναι μιγαδικά διαφορίσιμες (ενώ όλες οι ℝ-γραμμικές είναι ℝ-διαφορίσιμες)

Η παραπάνω παρατήρηση συμφωνεί με το εξής (είναι ισοδύναμη)
Για ℂ-γραμμικές $f(z)=\lambda z$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $z_0\in\mathbb{C}$ έχουμε $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lambda=f'(z_0)$ δηλ. είναι ℂ-διαφ $\left[\Leftrightarrow \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)-\lambda(z-z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{0}{z-z_0}=0\right]$ ενώ για ℝ-γραμμικές αλλά όχι ℂ-γραμμικές δηλ. για $f(z)=\lambda z+\mu\bar z$, $\mu\neq 0$

$\nexists\ \tilde\lambda\in\mathbb{C}$ με $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)-\tilde\lambda(z-z_0)}{z-z_0}=0$ (δηλ $\overset{\text{ισοδ.}}{\Leftrightarrow}$ η $f(z)$ δεν είναι μιγ. διαφ. στο z_0) $\Leftrightarrow \nexists\ \tilde\lambda\in\mathbb{C}$ με $\lim_{z\to z_0}\frac{(\lambda-\tilde\lambda)(z-z_0)+\mu(\bar z-\bar z_0)}{z-z_0}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim_{w\to 0}\frac{(\lambda-\tilde\lambda)w+\mu\bar w}{w}=0$, αφού αν υπήρχε τέτοιο $\tilde\lambda\in\mathbb{C}$ θα είχαμε $\lim_{w\to0}\frac{\bar w}{w}=\lim_{w\to0}\left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{\mu\bar w}{w}+\frac{(\lambda-\tilde\lambda)\bar w}{w}\right)+\frac{1}{\mu}(\tilde\lambda-\lambda)\right]=\frac{1}{\mu}\underbrace{\lim_{w\to0}\frac{\mu\bar w+(\lambda-\tilde\lambda)w}{w}}_{=0}+\frac{\tilde\lambda-\lambda}{\mu}=$

$=\frac{\tilde\lambda-\lambda}{\mu}$, το οποίο όμως δεν ισχύει αφού $\nexists \lim_{w\to0}\frac{\bar w}{w}$

επειδή $\lim_{z\to0}\frac{\bar z}{z}=\lim_{z\to0}\frac{\bar z^2}{|z|^2}=\lim_{x+iy\to0}\frac{x^2-y^2-2xyi}{x^2+y^2}$. $\exists \Leftrightarrow \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \wedge \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-2xy}{x^2+y^2}$

τα οποία όμως δεν υπάρχουν

<u>Συνεπώς,</u> ℝ-γραμ. $f(z)=\lambda z+\mu\bar z$ πάντα ℝ-διαφορίσιμες αλλά ℂ-διαφορίσιμες μόνο οι ℂ-γραμ. με $\mu=0$

Σάββατο 30/03/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 3η ώρα - 4η ώρα

Εφαρμογή / Παρατήρηση: Ένα διαν. πεδίο $\binom{u}{v}: D \to \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $\mathbb{R}$-διαφορίσιμο στο $(x_0, y_0) \in D \iff \exists$ $\mathbb{R}$-γραμ. συναρ. $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\binom{u}{v}(x,y) - \binom{u}{v}(x_0,y_0) - A\binom{x-x_0}{y-y_0}}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} = 0 \quad \text{και} \quad A = D\binom{u}{v}(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Αυτό το διανυσματικό πεδίο αντιστοιχεί στη μιγ. συν. $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ και με τον συμβολισμό $\lambda = \frac{a-ib}{2}$, $\mu = \frac{a+ib}{2}$, $a = \alpha + i\gamma$, $b = \beta + i\delta$, $z = x+iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$. Το πιο πάνω όριο ισοδυναμεί με

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z-z_0) - \mu(\bar{z} - \bar{z}_0)}{z - z_0} = 0$$

και λέμε ότι αν ισχύει αυτό η f είναι $\mathbb{R}$-διαφορίσιμη με $\mathbb{R}$-παράγωγο στο z_0 την $\mathbb{R}$-γραμμική μιγαδική συνάρτηση: $df_z: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με

$$df_{z_0}(z) = u_x(x_0,y_0)\cdot x + u_y(x_0,y_0)\cdot y + i\left(x v_x(x_0,y_0) + v_y(x_0,y_0)\cdot y\right) =$$
$$= (u_x + iv_x)x + (u_y + iv_y)y = ax + by = \lambda z + \mu \bar{z}$$

Το επόμενο Σάββατο αναπλήρωση 11:00 - 14:00

Εισάγοντας τις μερικές παραγώγους μιας μιγαδικής συνάρτησης ως $f_x(x_0 + iy_0) := u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)$ (και αντίστοιχα για y) λέμε ότι η $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ είναι μερικώς διαφ. στο $z_0 = x_0 + iy_0$ αν αυτές υπάρχουν. Μάλιστα ισχύει: $(f+g)_x = f_x + g_x$, $(f\cdot g)_x = f_x \cdot g + f\cdot g_x$

Αν οι $u_x, v_x, u_y, v_y: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $\exists$ και είναι $C \Rightarrow \binom{u}{v}$ διαφ στο D

$\Rightarrow$ αν οι $f_x, f_y: D \to \mathbb{C}$ $\underbrace{\exists \text{ και είναι } C}_{\iff f \in C^1(D)}$ $\Rightarrow f$ είναι $\mathbb{R}$-διαφορίσιμη

Τότε, αν $f \in C^1(D)$, η $\mathbb{R}$-παράγωγος της f είναι $df_{z_0}(z) = x f_x(z_0) + f_y(z_0) y$ και αν η f είναι (επιπλέον) $\mathbb{C}$-διαφορίσιμη, δηλ. εξίσ. C.R. τότε

$$df_{z_0}(z) = \left(u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)\right)x + \left(-v_x(x_0,y_0) + iu_x(x_0,y_0)\right)y = f_x(x_0+iy_0)\cdot(x+iy) = f_x(z_0)\cdot z = f'(z_0)\cdot z$$

και

Συνεπώς: $\mathbb{C}$-διαφ. = $\mathbb{R}$-διαφ + C.R. και τότε $\underbrace{df_{z_0}}_{\mathbb{R}\text{-παραγ.}} = \underbrace{f'(z_0)}_{\mathbb{C}\text{-παραγ.}}$

$$f'(z_0) = f_x(z_0) = -i f_y(z_0)$$

Παρατήρηση: όπως ορίζονται οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης μιας $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, ορίζονται και οι μερ. παρ. ανώτερης τάξης, $f \in C^k(D) \iff u = \operatorname{Re} f \wedge v = \operatorname{Im} f \in C^k(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $k = 0, 1, \dots, \infty$ και φυσικά ισχύει το Θ. Schwartz

$$f \in C^2(D) \Rightarrow f_{xy} = f_{yx}$$

Από τον ορισμό της παραγώγου μιγ. συν. $f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ προκύπτουν (όπως σε συναρτ. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ή εναλλ. με χρήση $\mathbb{R}$-διαφ διαν. πεδίων) τα ακόλουθα:

1) $f: D \to \mathbb{C}$ μιγ. διαφ. στο $z_0 \Rightarrow f$ συνεχής στο z_0

2) άλγεβρα παραγώγων:

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$

$$(fg)'(z_0) = f'g + g'f$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad g(z_0) \neq 0$$

3) Κανόνας της αλυσίδας: $(g \circ f)'(z_0) \stackrel{!}{=} g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$

Παράδειγμα: (4) Η εκθετική συνάρτηση $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι ακέραια αφού

$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y = u(x,y) + iv(x,y)$ με $u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

($\Rightarrow \exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι $\mathbb{R}$-διαφορίσιμη)

$$\left.\begin{aligned} u_x(x,y) &= e^x \cos y = v_y(x,y) \\ v_x(x,y) &= e^x \sin y = -u_y(x,y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ισχύουν οι εξισώσεις C. R}$$

με παράγωγο $(e^z)' = u_x(x,y) + i v_x(x,y) = e^z \Rightarrow \boxed{(e^z)' = e^z}$

Άσκηση: Νδο $f(z) = \bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$ δεν είναι σε κανένα $z_0 \in \mathbb{C}$ μιγ. διαφ.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} \not\exists \text{ για κανένα } z_0 \in \mathbb{C}$$

Πέμπτη 04/04/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 1η ώρα

$f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $z_0 \in D$ [αντιστοιχεί στο δ.π. $\binom{u}{v}: D \to \mathbb{R}^2$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0) \in D$]

f $\mathbb{C}$-διαφορίσιμη στο z_0 =>

$\Rightarrow \exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$

$f'(z_0) \in \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-παράγωγος της f στο z_0

$\underbrace{f'(z_0)(z)}_{\text{η συνάρτηση } f'(z_0): \mathbb{C} \to \mathbb{C}} = \underbrace{f'(z_0)}_{\in \mathbb{C}} \cdot z$, $z \in \mathbb{C}$

$\mathbb{C}$-διαφορικό της f στο $z_0 \underset{\text{λήμμα}}{\Leftrightarrow} \exists \lambda \in \mathbb{C}: \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0)}{z - z_0} = 0$

f $\mathbb{R}$-διαφορίσιμη στο z_0 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}: \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0) - \mu(\overline{z - z_0})}{z - z_0} = 0$ με

$Df(z_0) = df_{z_0}(z) = \lambda z + \mu \bar{w}$, $z \in \mathbb{C}$, η $\mathbb{R}$-παράγωγος της f (διαφορικό) στο z_0.

[$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $f(z) = \lambda z$, $z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$: f $\mathbb{C}$-γραμμική

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $f(z) = \lambda z + \mu \bar{z}$, $z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$: f $\mathbb{R}$-γραμμική]

[Ακόμη, το $\mathbb{R}$ διαφορικό $df_{z_0}(z)$ αντιστοιχεί στην $\mathbb{R}$ παράγωγο

$\begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Πράγματι, $df_{z_0}(z) = \lambda z + \mu \bar{z} = (\lambda_1 + i\lambda_2)(x + iy) + (\mu_1 + i\mu_2)(x - iy) =$

$= \lambda_1 x - \lambda_2 y + \mu_1 x + \mu_2 y + i(\lambda_2 x + \lambda_1 y + \mu_2 x - \mu_1 y) = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \mu_1 & -\lambda_2 + \mu_2 \\ \lambda_2 + \mu_2 & \lambda_1 - \mu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$]

$\boxed{\text{SOS}}$ f $\mathbb{C}$-διαφ. στο $z_0 \Leftrightarrow$ f $\mathbb{R}$-διαφ. στο $z_0 \Leftrightarrow \binom{u}{v}: D \to \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$, [με $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$] είναι $(x_0,y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}$-διαφορίσιμο στο (x_0,y_0)

$\begin{cases} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) = -u_y(x_0,y_0) \end{cases}$ Εξισώσεις Cauchy-Riemann

$f'(z_0) = f_x(x_0+iy_0) = u_x(x_0,y_0) + i v_x(x_0,y_0) = -i\big(u_y(x_0,y_0) + i v_y(x_0,y_0)\big) = -i f_y(x_0+iy_0)$

Επίσης,

$df_{z_0}(z) = \big(u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)\big)\cdot x + \big(u_y(x_0,y_0)+iv_y(x_0,y_0)\big)y = f_x(z_0)\cdot x + f_y(z_0)\cdot y \Rightarrow \boxed{df_{z_0}(z) = f_x(z_0)x + f_y(z}$

<u>αν f $\mathbb{R}$-διαφορίσιμη στο z_0,</u> $\exists$ το $\mathbb{R}$-διαφορικό και επιπλέον <u>αν f $\mathbb{C}$-διαφορίσιμη στο z_0,</u> τότε <u>ισχύουν οι εξισώσεις C.R.</u> και άρα!

$df_{z_0}(z) = \big(u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)\big)\cdot x + \big(u_y(x_0,y_0)+iv_y(x_0,y_0)\big)\cdot y = \big(u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)\big)\cdot x + \big(-v_x(x_0,y_0)+iu_x(x_0,y_0)\big)y$

$= \big(u_x(x_0,y_0)+i\cdot v_x(x_0,y_0)\big)(x+iy) = f'(z_0)\cdot z \Rightarrow \boxed{df_{z_0}(z) = f'(z_0)\cdot z}$

[f $\mathbb{C}$-διαφ $\Rightarrow$ $\mathbb{C}$-διαφορικό $=$ $\mathbb{R}$-διαφορικό $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{C}$-παράγωγος $=$ $\mathbb{R}$-παράγωγος]

<u>Παραδείγματα:</u> ακέραιων (= ολόμορφων στο $\mathbb{C}$ = μιγ. διαφ. $z\in\mathbb{C}$), $f(z)=c$, $c\in\mathbb{C}$, $f(z)=z$, $z\in\mathbb{C}$

αλλά $f(z)=\bar{z}$ δεν είναι πουθενά μιγ. διαφ., αφού $\forall\, z\in\mathbb{C}$ $\left\{\begin{matrix}\mathbb{C}\text{-γραμμική} \\ + \\ \mathbb{R}\text{-γραμμική}\end{matrix}\right\}$

$\lim_{z\to z_0}\frac{\bar z-\bar z_0}{z-z_0} = \lim_{w\to 0}\frac{\bar w}{w} \nexists$ ενώ το αντίστοιχο δ.π.

$\mathbb{R}$-γραμμική αλλά όχι $\mathbb{C}$-γραμμική

$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = x - iy \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix} \Rightarrow D\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ και

$u,v\in C^\infty(\mathbb{R}^2) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\in C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$.

<u>Συνεπώς</u>, το αν ένα δ.π. αντιστοιχεί σε μιγαδικά διαφορίσιμη μιγαδική συνάρτηση, δεν είναι ζήτημα λειότητας (δηλ. πόσες φορές είναι συν. μερ. διαφ.) αλλά της δομής της παραγώγου

[ενώ για $f(z)=z \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Rightarrow D\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$f(z)=c \Rightarrow f'(z)=0$, $f(z)=z \Rightarrow f'(z)=1$]. Ακόμα, άλγεβρα παραγώγων ή απευθείας με ορισμό. $f(z)=z^n$, $n=1,2,3,\dots \Rightarrow f'(z)=n\cdot z^{n-1}$ $\forall\, z\in\mathbb{C}$ (δηλ. f ακέραια) $\Rightarrow$ πολυώνυμα του z / ρητές συναρτήσεις του z / ολόμορφες όπου ορίζεται

$f(z)=\frac{1}{z^n}$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $n=1,2,\dots \Rightarrow f'(z) = -\frac{n}{z^{n+1}}$ $\forall\, z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$

Επίσης, με εξισώσεις C.R. είδαμε $f(z)=e^z \Rightarrow f'(z)=e^z$ $\forall\, z\in\mathbb{C}$

[$f(x+iy) = e^x\cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = \begin{pmatrix}e^x\cos y\\ e^x\sin y\end{pmatrix} \Rightarrow D\begin{pmatrix}e^x\cos y\\ e^x\sin y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^x\cos y & -e^x\sin y\\ e^x\sin y & e^x\cos y\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x+iy) = f_x(x+iy) = e^x(\cos y + i\cdot\sin y) = \underline{e^{x+iy}}$]

Πέμπτη 04/04/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 2η ώρα

Παράδειγμα: Η λογαριθμική συνάρτηση $\log: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $\log z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$

Είδαμε ότι είναι συνεχής στο $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0] \Longrightarrow$ ολόμορφη στο $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$

Προσοχή: Για αυτή τη συνάρτηση, όχι γενικά

[περίεργο, αφού συνήθως: διαφορίσιμη $\Rightarrow$ συνεχής $\not\Leftarrow$]

Πρόταση: Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, και $g: D \to \mathbb{C}$ συνεχής με $f = \exp \circ g: D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη $\Rightarrow$ η g είναι ολόμορφη με μιγ. παράγωγο

$g'(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$, $z \in D$

[Εφαρμογή με $g(z) = \log z$, $z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ δίνει $(\log z)' = \frac{1}{z}$] $(f(z) = e^{g(z)})$

Απόδειξη: Έστω $z_0 \in D$. Θνδο: $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = \dfrac{f'(z_0)}{f(z_0)}$

1) Έστω $f'(z_0) \neq 0 \underset{(*)}{\Rightarrow} \exists\, \delta > 0\ \forall z \in D(z_0,\delta)\setminus\{z_0\} \subset D: f(z) \neq f(z_0) \Rightarrow g(z) \neq g(z_0)$

[(*) Αφού $f'(z_0) \neq 0$, θέτοντας $\varepsilon := \dfrac{|f'(z_0)|}{2} > 0$ έχουμε:

$\exists\, \delta > 0\ \forall z \in D$ με $0 < |z - z_0| < \delta$: $\left|\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right| < \dfrac{|f'(z_0)|}{2} \Rightarrow 0 < \dfrac{|f'(z_0)|}{2}$

$< |f'(z_0)| - \left|\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right| \leq \left|\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \Rightarrow |f(z)-f(z_0)| > 0$]

Άρα με τα δεδομένα της υπόθεσης, $\forall (z_n) \subset D\setminus\{z_0\}$ με $z_n \to z_0$

$\exists\, \delta > 0\ \forall n \geq n_0$: $0 < |z_n - z_0| < \delta \Rightarrow g(z_n) \neq g(z_0)$ και $f(z_n) \neq f(z_0)$

και $z_n \to z \Rightarrow g(z_n) \to g(z) \Rightarrow \dfrac{f(z_n)-f(z_0)}{g(z_n)-g(z_0)} \to f(z_0) \Rightarrow$

$$\frac{g(z_n)-g(z_0)}{z_n - z_0} = \frac{g(z_n)-g(z_0)}{f(z_n)-f(z_0)} \cdot \frac{f(z_n)-f(z_0)}{z_n - z_0} \longrightarrow \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}$$

2) Έστω $f'(z_0) = 0$, $(z_n) \subset D\setminus\{z_0\}$ με $z_n \to z_0$ και $\varepsilon > 0$. Αν το $N = \{n \in \mathbb{N}: g(z_n) \neq g(z_0)\}$ έχει άπειρο πλήθος στοιχείων, τότε το N είναι εικόνα μιας υπακολουθίας $(k_n) \subset (n)$ με $z_{k_n} \to z_0 \Rightarrow$

$\underset{\substack{g \text{ συνεχής} \\ \exp \text{ ακέραια} \neq 0}}{\Rightarrow} \left|\dfrac{f(z_{k_n}) - f(z_0)}{g(z_{k_n}) - g(z_0)}\right| \geq \dfrac{|f(z_0)|}{2} > 0$ $\forall n \geq n_1$ για κάποιο n_1

και $\exists\, n_2 \ \forall\, n \geq n_2 \quad \left|\dfrac{f(z_{k_n})-f(z_0)}{z_{k_n}-z_0}\right| < \dfrac{\varepsilon\,|f(z_0)|}{2}$

Άρα $\left|\dfrac{g(z_{k_n})-g(z_0)}{z_{k_n}-z_0}\right| = \left|\dfrac{g(z_{k_n})-g(z_0)}{f(z_{k_n})-f(z_0)}\right| \cdot \left|\dfrac{f(z_{k_n})-f(z_0)}{z_{k_n}-z_0}\right| < \varepsilon$

Παραδείγματα/Ασκήσεις:

1) $\exp(z)=e^z$, $z\in\mathbb{C}$ ακέραια και $(e^z)'=e^z$

2) $\log z=\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}z$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ είναι ολόμορφη ($\Rightarrow$ συνεχής) στο $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ και $(\log z)'=1/z$

3) Η συνάρτηση λ-δύναμης, $\lambda\in\mathbb{C}$, $f(z)=z^\lambda$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ αφού $z^\lambda=e^{\lambda\cdot\log z}\Rightarrow(z^\lambda)'=(e^{\lambda\cdot\log z})'=e^{\lambda\log z}(\lambda\log z)'=$
$=z^\lambda\cdot\lambda(\log z)'=z^\lambda\cdot\lambda\cdot 1/z=\lambda\cdot z^{\lambda-1}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Ολόμορφη} \Rightarrow \text{συνεχής}\\ (fg)'=f'g+fg'\\ (f\circ g)'(z)=f'(g(z))\cdot g'(z)\end{array}} \longrightarrow \text{Εργαλεία}$$

4) $a^z:=e^{z\log a}$, $z\in\mathbb{C}$, $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, είναι ακέραια με $(a^z)'=(e^{z\log a})'=e^{z\log a}(z\cdot\log a)'=$
$=e^{z\log a}\log a=a^z\cdot\log a$

5) $f(z)=|z|^2=|x+iy|^2=x^2+y^2$, $z\in\mathbb{C}$ είναι μιγαδικά διαφορίσιμη μόνο στο $z=0$

$[f(x+iy)=x^2+y^2=u(x,y)+iv(x,y)$, $\begin{array}{l}u(x,y)=x^2+y^2\\ v(x,y)=0\end{array}$ όπου οι $u,v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ($\Leftrightarrow\binom{u}{v}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$)
είναι $\mathbb{R}$-διαφορίσιμες (μάλιστα $u,v\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$) αλλά $\begin{array}{ll}u_x=2x & u_y=2y\\ v_x=0 & v_y=0\end{array}\Rightarrow$
$\Rightarrow$ οι εξισώσεις C.R. ισχύουν μόνο για $x=0$ και $y=0$

$|z|^2-|z_0|^2=(\bar z+\bar z_0)(z-z_0)$

Αλλιώς: $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$: $\lim_{z\to z_0}\frac{|z|^2-|z_0|^2}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{z\cdot\bar z-z_0\bar z_0}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\left(\bar z+\bar z_0\cdot\frac{\bar z-\bar z_0}{z-z_0}\right)\not\exists$

Αν υπήρχε θα υπήρχε το $\lim_{w\to 0}\frac{\bar w}{w}$

Ενώ για $z_0=0$: $\lim_{z\to z_0}\frac{|z|^2-|0|^2}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{z\cdot\bar z}{z}=\lim_{z\to 0}\bar z=0\Rightarrow$
$\Rightarrow\left.\frac{d}{dz}|z|^2\right|_{z=0}=0.$

6) Αντίστοιχα, η $f(z)=z^{-n}$, $z\in\mathbb{C}$, $n\geq 2$, είναι μιγ. διαφ. μόνο στο $z=0$ με $\frac{d}{dz}f(z)\Big|_{z=0}=0$

7) Εξετάστε $\mathbb{C}$-διαφορισιμότητα για την $g(x+iy)=\underbrace{x^2+y^2}_{u(x,y)}+i\underbrace{2xy}_{v(x,y)}$

Λύση

$u,v\in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ με $u_x=2x$ $u_y=2y$
$v_x=2y$ $v_y=2x$

Συνεπώς οι εξισώσεις C.R. ισχύουν αν και μόνο αν $v_x=-u_y \iff y=-y \iff y=0$

$\Rightarrow$ Η $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ είναι μιγαδικά διαφορίσιμη μόνο στα σημεία $z\in\mathbb{R}$ ($\iff \forall z\in\mathbb{C}: \mathrm{Im}\,z=0$)

[όχι ολόμορφη γιατί η έννοια αυτή χρησιμοποιείται μόνο ανοικτά σύνολα ολομορφίας]

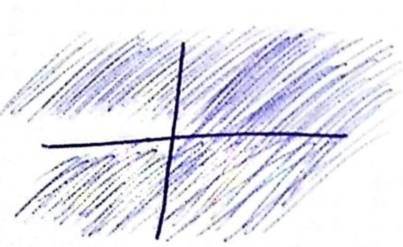
<u>Παρατήρηση</u>: Αν $f:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ μιγ. διαφ. στο $z_0\in\mathbb{R}$ τότε $f\big|_{\mathbb{R}}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ πραγμ. διαφ στο $z_0\in\mathbb{R}$. [η μιγ. διαφ. επεκτείνει την πραγμ. διαφ]

8) Η συνάρτηση της απολύτου τιμής $f(z)=|z|$ αντιστοιχεί στο δ.π. $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}(x,y)=\begin{pmatrix}\sqrt{x^2+y^2}\\0\end{pmatrix}$ με $D\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

(στο $(0,0)$ $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ δεν είναι $\mathbb{R}$-διαφ. $\Rightarrow$ δεν είναι $\mathbb{C}$-διαφ. $\Rightarrow$ δεν ισχύουν οι C.R. για κανένα $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ αλλά $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\in C^{\infty}(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\mathbb{R}^2)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ δεν είναι πουθενά $\mathbb{C}$-διαφ.

9) Η συνάρτηση του κύριου ορίσματος $\mathrm{Arg}:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to(-\pi,\pi]$ είναι συνεχής μόνο στα $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ αλλά σε κανένα $z_0\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ δεν είναι μιγ. διαφ.



Παρασκευή 05/04/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις $2^{η}$ ώρα

Οι τελεστές $\partial, \bar\partial$:

Είδαμε ότι $f: D \to \mathbb{C}$, $f(u,v)=u+iv$, $z_0 \in D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, είναι $\mathbb{C}$-διαφ. <=> $\mathbb{R}$-διαφ. και $\begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases}$ στο z_0

$\Downarrow$

$\exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{C}: f(z) = f(z_0) + \lambda(z-z_0) + \mu(\bar z - \bar z_0) + o(|z-z_0|)$ για $z \to z_0$

[<=> $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)-\lambda(z-z_0)-\mu(\bar z-\bar z_0)}{|z-z_0|} = 0$]

και $df_{z_0}(z) = \underbrace{\lambda}_{\lambda_1+i\lambda_2} z + \underbrace{\mu}_{\mu_1+i\mu_2} \bar z$ είναι ($\mathbb{R}$-γραμμική) $\mathbb{R}$-διαφ. της f στο z_0 =>

$\Rightarrow df_{z_0}(z) = (\lambda_1+i\lambda_2)(x+iy) + (\mu_1+i\mu_2)(x-iy) = \lambda_1 x - \lambda_2 y + i(\lambda_2 x + \lambda_1 y) + \mu_1 x + \mu_2 y + i(\mu_2 x - \mu_1 y)$

$= (\lambda_1+i\lambda_2)x + (-\lambda_2+i\lambda_1)y + (\mu_1+i\mu_2)x + (\mu_2-i\mu_1)y = (\lambda_1+\mu_1+i(\lambda_2+\mu_2))x + (-\lambda_2+\mu_2+i(\lambda_1-\mu_1))y$

$= f_x(z_0)\cdot x + f_y(z_0)\cdot y$

$= u_x(x_0,y_0)\cdot x + u_y(x_0,y_0)y + i(v_x(x_0,y_0)\cdot x + v_y(x_0,y_0)\cdot y)$

$$\boxed{\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1+\mu_1 & -\lambda_2+\mu_2 \\ \lambda_2+\mu_2 & \lambda_1-\mu_1 \end{pmatrix}}$$

Άρα $df_{z_0}(z) = \lambda z + \mu \bar z = \dots = f_x(z_0)\cdot x + f_y(z_0)\cdot y = \frac{f_x(z_0)-if_y(z_0)}{2}(x+iy) + \frac{f_x(z_0)+if_y(z_0)}{2}(x-iy) = \underbrace{\frac{f_x(z_0)-if_y(z_0)}{2}}_{\lambda}\underbrace{(x+iy)}_{z} + \underbrace{\frac{f_x(z_0)+if_y(z_0)}{2}}_{\mu}\underbrace{(x-iy)}_{\bar z}$

$=: \frac{\partial}{\partial z} f(z_0)\cdot z + \frac{\partial}{\partial \bar z} f(z_0)\cdot \bar z =: \partial f(z_0)\cdot z + \bar\partial f(z_0)\cdot \bar z$.

και, είδαμε,

f: $\mathbb{C}$-διαφ στο z_0 <=> f $\mathbb{R}$-διαφ στο z_0 (δηλ. $\exists\, df_{z_0}(z) = \lambda z + \mu \bar z$)

Άρα, μια $\mathbb{R}$-διαφ. f είναι $\mathbb{C}$-διαφ. <=> $\bar\partial f = 0$ και τότε $\partial f = f'$

[$\bar\partial f = 0$ <=> $f_x + if_y = 0$ <=> $f_x = -if_y$, όπου $f' = f_x$, ($f' = u_x + iv_x$)

=> $\partial f = \frac{f_x - if_y}{2} = f_x = f'$]

Άρα, εισάγοντας τους διαφ. τελεστές $\bar\partial := \frac{\partial}{\partial \bar z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\partial := \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, έχουμε την εξής ισοδύναμη μορφή του

Θ.C.R.: Η $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, ανοικτό, είναι $\boxed{\text{ολόμορφη}}$ <=> Η f είναι $\mathbb{R}$-διαφ. και $\boxed{\bar\partial f = 0}$, τότε $\boxed{f' = \partial f}$

Παρατήρηση / Άσκηση

Έστω $M = \{ f : D \to \mathbb{C},\ f$ μερ. διαφ. $\left(\iff \begin{matrix} \forall z \in D\ \exists\ f_x, f_y : D \to \mathbb{C} \\ \forall (x,y) \in D\ \exists\ u_x, u_y, v_x, v_y : D \to \mathbb{R} \end{matrix} \right) \}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό

Τότε οι διαφορικοί τελεστές $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar z}$ που δρουν πάνω στο M είναι στον διανυσματικό χώρο πάνω από το $\mathbb{C}$, M, $\mathbb{C}$-γραμμικοί τελεστές, π.χ. $\bar\partial(af + bg) = a\bar\partial f + b\bar\partial g$, $\forall f, g \in M$, $\forall a, b \in \mathbb{C}$

Επίσης ισχύουν (για $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \bar\partial, \partial$) ο κανόνας του γινομένου, [π.χ. $\bar\partial(fg) = (\bar\partial f)g + f(\bar\partial g)$] και ο κανόνας του πηλίκου (π.χ.

$$\bar\partial\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\bar\partial f - f\bar\partial g}{g^2}, \quad g \neq 0$$

Παρατήρηση:

$\bar\partial = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$, $\partial = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$

$\iff \underbrace{\partial_x}_{\frac{\partial}{\partial x}} = \bar\partial + \partial$ και $i\underbrace{\partial_y}_{\partial/\partial y} = \bar\partial - \partial$

Η ισοδύναμη μορφή του C.R. οδηγεί και στον εξής ορισμό:

Ορισμός: Η $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, ονομάζεται $\boxed{\text{αντιολόμορφη}}$, αν είναι $\mathbb{R}$-διαφ. και $\boxed{\partial f = 0}$. Τότε $\bar\partial f$ ονομάζεται παράγωγος της f ως προς $\bar z$.

Πρόταση: Έστω $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και $\bar f = u - iv$, $(u, v : D \to \mathbb{R})$

και $\bar D = \{ \bar z : z \in D \}$. ← όχι κλειστή θήκη, το σύνολο των συζυγών. Τότε:

1) f αντιολόμορφη $\iff$ $\bar f$ ολόμορφη και τότε $\bar\partial f = \overline{(\bar f)'} = \overline{(\partial \bar f)}$

2) f αντιολόμορφη $\iff$ η $g(z) := f(\bar z)$, $z \in \bar D$, είναι ολόμορφη και τότε

$$\underbrace{\bar\partial f}_{\frac{\partial}{\partial \bar z}}(z) = \underbrace{\partial g}_{\frac{\partial}{\partial z}}(\bar z), \quad z \in D$$

Παράσκευή 05/04/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 3η ώρα

Απόδειξη (1): Έστω f $\mathbb{R}$-διαφ. αντιστοιχεί στο δ.π. $\binom{u}{v}: D \to \mathbb{R}^2$.
Η $\bar f$ αντιστοιχεί στο δ.π. $\binom{u}{-v}$ (το οποίο είναι επίσης $\mathbb{R}$-διαφ. δ.π. · αυτό δεν εξαρτάται από τη δομή του $D\binom{u}{v}$)
με παράγωγο $D\binom{u}{-v} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -v_x & -v_y \end{pmatrix}$ και η $\bar f$ είναι ολόμορφη αν-ν
Σ{. C.R. $\begin{cases} u_x = -v_y \\ v_x = u_y \end{cases} \iff \bar f_x = u_x - iv_x = -v_y - iu_y = -i(u_y - iv_y) = -i\bar f_y \iff$
$\bar f_x + i\bar f_y = 0 \iff \bar\partial \bar f = 1/2\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\bar f = 0$

$\iff f_x = u_x + iv_x = -v_y + iu_y = i(u_y + iv_y)$ και άρα
$\bar f' = \bar f_x = -i\bar f_y = \partial \bar f$ και $f_x = i f_y = \bar\partial f$ ή αλλιώς $\overline{\bar\partial f} = (\bar f)' = \partial \bar f \iff \overline{\bar\partial f} = (\overline{f'})$

[f αντιολόμορφη $\iff \partial f = 0$, f ολόμορφη $\iff \bar\partial f = 0$]
[$\partial \bar f = 1/2(\bar f_x - i\bar f_y)$, $\bar\partial f = 1/2(f_x + if_y)$]

Υπενθύμιση: f $\mathbb{R}$-διαφ. είναι ολόμορφη $\iff \bar\partial f = 0$ και τότε $f' = \partial f$
αντιολόμορφη $\iff \partial f = 0$ και τότε $\bar\partial f$ παρ/μα ως προς

1) $f(z) = c$, $c \in \mathbb{C}$ σταθερά, $z \in \mathbb{C} \Rightarrow \bar\partial c = 0 = 1/2\left(\frac{\partial}{\partial x}c + i\frac{\partial}{\partial y}c\right)$ και $\partial c = 0 = c'$
Η σταθερή συνάρτηση είναι και ολόμορφη και αντιολόμορφη.

2) $\forall\ n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $z \in \mathbb{C}$ και $\forall\ -n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$
z^n ολόμορφη $\iff \bar\partial(z^n) = 0$ και $\partial(z^n) = n \cdot z^{n-1} \Rightarrow$ οι z^n αυτές είναι ολόμορφες στο πεδίο ορισμού τους αλλά δεν είναι αντιολόμορφα σε κανένα ανοικτό υποσύνολο του πεδίου ορισμού τους

3) $f(z) = z$, $z \in \mathbb{C} \Rightarrow f$ ολόμορφη $\iff \bar\partial z = 0 \overset{\text{Προτ. (1)}}{\iff} \bar\partial \bar z = \overline{z'} = \overline{\partial z} = \bar 1 = 1$
$\iff \partial \bar z = 0 \iff z \mapsto \bar z$ αντιολόμορφη

Επίσης $\bar\partial(z^n) = n\bar z^{n-1}$, $\partial(\bar z^n) = 0 \Rightarrow \forall\ n, m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ στο π.ο. της

$z \mapsto z^n \bar z^m$, από τον κανόνα γινομένου:
$\bar\partial(z^n \bar z^m) = \bar z^m(\bar\partial z^n) + z^n \bar\partial(\bar z^m) = m z^n \bar z^{m-1}$ ($\Rightarrow$ όχι ολόμορφη αν $\neq 0$)
$\partial(z^n \bar z^m) = \bar z^m \partial(z^n) + z^n \partial(\bar z^m) = n \cdot \bar z^m z^{n-1}$ ($\Rightarrow$ όχι αντιολόμορφη αν $\neq 0$)

[$n = 1, m = 1$: $|z|^2 = z \cdot \bar z$ ούτε ολόμορφη, ούτε αντιολόμορφη]

Σάββατο 06/04/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 1η ώρα

Κεφάλαιο 4: Αναλυτικές Συναρτήσεις (+ Κεφ. 5 => αναλυτικές = ολόμορφες)

[Θεώρημα Weierstrass, δηλ. συναρτήσεις που προκύπτουν από δυναμοσειρές]

§ 4.1 Σειρές (στο $\mathbb{C}$)

[Δομή και ιδιότητες όπως οι σειρές στο $\mathbb{R}$, προσαρμοσμένες στις δύο διαστάσεις του $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$]

Ορισμός: Έστω $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. Η ακολουθία $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ των μερικών αθροισμάτων $s_n = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} z_k}_{\in\mathbb{C}}$ ονομάζεται σειρά (με όρους z_n) και συμβολίζεται με $\sum_{k=1}^{n} z_k := (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και αν η (s_n) συγκλίνει τότε το όριο της συμβολίζεται με $\sum_{k=1}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{C}$. Λέμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει απόλυτα αν η $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ συγκλίνει, δηλ αν $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$.

Παρατήρηση:

Οι έννοιες της σειράς, της συγκλίνουσας σειράς και της απόλυτης σύγκλισης σειράς είναι επεκτάσεις των αντίστοιχων εννοιών στο $\mathbb{R}$ (δηλ. των $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ τότε οι παραπάνω έννοιες είναι οι ίδιες αν τις δω/καταλάβω στο $\mathbb{R}$ ή στο $\mathbb{C}$.

Πρόταση: α) $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει => $z_n \to 0$

β) $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ συγκλίνουν => $\forall\ \lambda,\mu \in \mathbb{C}$: $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda z_n + \mu w_n)$ συγκλίνει και για τα αντίστοιχα όρια ισχύει: $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda z_n + \mu w_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} z_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} w_n \in \mathbb{C}$

γ) Αν $z_n = x_n + i y_n$ με $(x_n),(y_n) \in \mathbb{R}$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ και η σειρά στα αριστερά συγκλίνει <=> και οι δύο σειρές στα δεξιά συγκλίνουν

δ) $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$ => $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει.

<u>Απόδειξη</u>: α) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = (S_n)$ με $S_n \to S$ $\quad \sum_{k=1}^{n} z_k \Rightarrow S_{n-1} \to S \Rightarrow$ $n \geq 2$

$z_n = S - S_{n-1} \to 0$

β) Αν η $a_n = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$, $n \in \mathbb{N}$, συγκλίνει $\xrightarrow[\text{μετρ. χώρος}]{\mathbb{R} \text{ πλήρης}}$ η $(a_n) \subset \mathbb{R}$ είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}$ και αφού $|S_{n+l} - S_n| \leq \sum_{k=n+1}^{n+l} |z_k| = a_{n+l} - a_n$

$\Rightarrow$ η (S_n) είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{C}$ $\xrightarrow[\text{μετρ. χώρος}]{\mathbb{C} \text{ πλήρης}}$ η (S_n) $\forall n, l \in \mathbb{N}$ συγκλίνει

$\uparrow$

[έχουμε $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall l \in \mathbb{N}: |a_{n+l} - a_n| < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall l \in \mathbb{N}: |S_{n+l} - S_n| < \varepsilon$]

$\boxed{\text{Super SOS}}$: Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ συγκλίνει με όριο

$\sum_{n=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$, $z \in D(0,1)$ $\{\forall z \in \mathbb{C}\ \ |z| < 1$ [συμβ. $\forall |z| < 1$]$\}$

και μάλιστα απόλυτα $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{|z|^n}_{=|z^n|} = \frac{1}{1-|z|}$, $z \in D(0,1)$

[αφού $|z|^n \to 0$ για $|z| < 1$ και $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}$, $z \neq 1$]

ενώ αποκλίνει για $|z| \geq 1$ αφού τότε $\underbrace{|z|^n}_{|z^n|} \geq 1$ και άρα $z^n \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ δεν συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n$ δεν συγκλίνει

[$S^{n-1} = 1 + z + \dots + z^{n-1}$
$zS^{n-1} = z + z^2 + \dots + z^n$
$\Rightarrow (1-z) \cdot S^{n-1} = 1 - z^n \Rightarrow S^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}$, $z \neq 1$

<u>Πρόταση</u>: Κριτήρια σύγκλισης σειρών

α) Κριτήριο σύγκρισης: $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n| < +\infty$ και $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: |z_n| \leq |w_n| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$

και αν $\lim_{n \to \infty} \frac{|z_n|}{|w_n|} \in (0, +\infty)$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |w_n| < +\infty$

[Το πρώτο χρησιμοποιεί την πληρότητα του $\mathbb{R}$
Το δεύτερο $\lim_{n \to \infty} \frac{|z_n|}{|w_n|} = a \in (0, +\infty) \Rightarrow \exists n_0\ \forall n \geq n_0: |z_n| < (a+1)|w_n| \xrightarrow[\text{άλγεβρα ορίων}]{\text{πρώτο}} \sum_{n=1}^{\infty} |w_n| < +\infty \Rightarrow$
$\Rightarrow (a+1) \sum_{n=1}^{\infty} |w_n| < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a+1)|w_n| < +\infty \xrightarrow{|z_n| < (a+1)|w_n|} \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$ και το αντίστροφο προκύπτει από το ότι $\lim_{n \to \infty} \frac{|w_n|}{|z_n|} = \frac{1}{a} \in (0, +\infty)$]

Σάββατο 06/04/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 2η ώρα - 3η ώρα

β) Κριτήριο λόγου: Αν $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ με $z_n \neq 0$ $\forall\, n \geq n_0$ τότε:

$\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$ και

$\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ αποκλίνει

Η (z_n) δεν είναι μηδενική

γ) Κριτήριο ρίζας: $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$ και

$\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ αποκλίνει

[αν $\exists \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| \in [0, +\infty)$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \limsup\limits_{n\to\infty} |z_n| = \liminf\limits_{n\to\infty} |z_n|$ και αντίστροφα]

[Έστω $(a_n) \subset [0, +\infty)$. Τότε, αν η (a_n) είναι φραγμένη, τότε

$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ = το μέγιστο σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας = το μέγιστο όριο από όλα τα όρια των συγκλινουσών υπακολουθιών.

(Όταν λέμε φραγμένη είναι και πάνω και κάτω φραγμένη.
Αλλά τώρα μιλάμε για θετικές ακολουθίες άρα μας νοιάζει μόνο από πάνω)

Αν η (a_n) δεν είναι φραγμένη, τότε υπάρχει υπακολουθία, με $n \in a_n \to \infty$ και θέτουμε $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$]

Απόδειξη του (β) (ενδεικτικά τα άλλα ασκήσεις)

Έστω $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} < 1 \Rightarrow \exists\, a \in (0,1): \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} < a$ $\left[\text{π.χ. } a = \frac{\tilde{a}+1}{2}\right]$

$\Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall\, n \geq n_0$: $\underbrace{\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}}_{=:a_n} < a$ [αν υπήρχε a_{k_n} με $a_{k_n} \geq a$, τότε δε

θα ίσχυε $\limsup a_n < a$]

$\forall\, n \geq n_0$ $\frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} = \prod\limits_{k=n_0}^{n} \frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} < \frac{a^{n+1}}{a^{n_0}} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ από το κριτήριο σύγκρισης

και την σύγκλιση της γεωμ. σειράς

§ 4.2 Δυναμοσειρές.

<u>Ορισμός</u>: Μια σειρά (άρα, καταρχήν, καμία πληροφορία περί σύγκλισης ή όχι) της μορφής (*) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ ονομάζεται δυναμοσειρά με κέντρο $a \in \mathbb{C}$ και συντελεστές $c_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$.

Η (*) είναι μια σειρά συναρτήσεων $f_n(z) = c_n (z-a)^n$

<u>Παρενθεση</u>. Έστω $\emptyset \neq D \in \mathbb{C}$. Έστω $f_n : D \to \mathbb{C}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται ακολουθία συναρτήσεων και η ακολουθία συναρτήσεων $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ ονομάζεται σειρά συναρτήσεων και συμβολίζεται με $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$

Λέμε ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>συγκλίνει κατά σημείο</u> στην $f : D \to \mathbb{C}$, αν

$f_n(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(z)$ $\forall z \in D$

Αντίστοιχα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει κατά σημείο, αν $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ συγκλίνει $\forall z \in D$.

Λέμε ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>συγκλίνει ομοιόμορφα</u> στην $f : D \to \mathbb{C}$, αν

$$\sup_{z\in D} |f_n(z) - f(z)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{δηλαδή} \quad \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Αν $f_n, f \in C(D) = \{$συνεχείς συναρτήσεις από το D στο $\mathbb{C}\}$ και D συμπαγές τότε $f_n - f \in C(D) \Rightarrow |f_n - f| \in C(D) \Rightarrow \exists\ \|f_n - f\|_\infty \in [0, +\infty)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

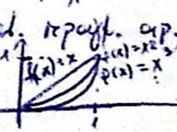
<u>Πρόταση</u>: $f_n \to f$ ομοιόμορφα $\Rightarrow f_n \to f$ κατά σημείο.

<u>Απόδειξη</u>: $f_n \to f$ ομοιομ. $\Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : \sup_{z\in D} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \Rightarrow \forall z \in D : 0 \leq |f_n(z) - f(z)| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Από κριτήριο ισοσυγκλινουσών, $|f_n(z) - f(z)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow f_n \to f$ κατά σημείο

Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλ. $f_n \to f$ κατά σημείο $\not\Rightarrow$ $f_n \to f$ ομοιόμορφα

<u>(Αντι)παράδειγμα</u>: Έστω $D = [0,1) \subset \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n, x \in D$. Τότε παρατηρούμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : D \to \mathbb{R}$ συγκλίνει κατά σημείο στην $f(x) = 0$ $\forall x \in D = [0,1)$. Δηλ. $\forall x \in [0,1) : f_n(x) = x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = f(x)$. Όμως, δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο π.ο. της αφού αν ίσχυε αυτό τότε θα ίσχυε $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x)$ $[g : D \to \mathbb{R}]$ και άρα (μοναδικότητα ορίου ακολ. πραγμ. αρ.) $g(x) = 0$ $\forall x \in D$, αλλά $\|f_n - g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1)} |f_n(x) - \underset{0}{g(x)}| = \sup_{x\in[0,1)} |x^n| = \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1 \not\to 0$



Πέμπτη 11/04/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 1η ώρα

<u>Δυναμοσειρές</u>

<u>Ορισμός:</u> $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ (*)

ονομάζεται δυναμοσειρά κέντρου $a\in\mathbb{C}$ και συντελεστής $(c_n)\subset\mathbb{C}$

[για $z=a \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n (a-a)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k (a-a)^k = c_0\cdot 0^0 + 0 + \dots + 0 = c_0$

Η δυναμοσειρά (*) πάντα συγκλίνει ως σταθερή ακολουθία με μόνο όριο το c_0]

(Ερώτημα: Για ποια $z\neq a$ συγκλίνει η * ;)

Η (*) είναι σειρά συναρτήσεων $f_n(z) = c_n (z-a)^n$, $z\in\mathbb{C}$ [για κάθε σταθερό $n\in\mathbb{N}_0$] οι οποίες είναι ακέραιες με $f_n'(z) = n c_n (z-a)^{n-1}$

που ορίζει στο πεδίο σύγκλισής της

$$D := \left\{ z\in\mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \text{ συγκλίνει} \right\} \quad (a\in D \Rightarrow D\neq\emptyset)$$

μια συνάρτηση $f: D\to\mathbb{C}$, το κατά σημείο όριο της δυναμοσειράς (*).

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, $z\in D$ (**) και η (*) είναι το ανάπτυγμα της f.

<u>Παράδειγμα:</u> Η γεωμετρική σειρά:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{z^n}_{f_n(z)} = \underbrace{\frac{1}{1-z}}_{f(z)}$$ με πεδίο σύγκλισης $D = D(0,1)$

<u>Προσοχή:</u> Η $f(z) = \frac{1}{1-z}$ ορίζεται στο $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ και μάλιστα είναι ολόμορφη. Παρ'όλα αυτά, αναπτύσσεται στη γεωμετρική σειρά μόνο στο $D(0,1)$

<u>Παρατήρηση:</u> (Άσκηση)

Αν η (c_n) είναι φραγμένη, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ συγκλίνει απόλυτα $\forall z\in D(0,1)$ και η $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$ συγκλίνει απόλυτα $\forall z\in D$ ενώ η $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$ συγκλίνει μόνο για $z=0$

Πέμπτη 11/04/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 1η ώρα

<u>Κίνητρο ομοιόμορφης σύγκλισης</u> (ακολουθιών ή σειρών συναρτήσεων)

Έστω $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{c_n (z-z_0)^n}^{f_n(z)}$, $z \in D$ $= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{c_k (z-z_0)^k}_{f_k(z)}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz} f(z) = \lim_{w\to 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(z+w) - f_k(z)}{w}$$

<u>Ερώτημα</u>: Μπορώ να αλλάξω τη σειρά δύο οριακών διαδικασιών και να πάω από $\lim_{w\to 0} \lim_{n\to\infty}$, με το ίδιο αποτέλεσμα, στο $\lim_{n\to\infty} \lim_{w\to 0}$;

<u>Ορισμός</u>: Έστω $D \subset \mathbb{C}$ και $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Λέμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f : D \to \mathbb{C}$ αν:

$$\|f_n - f\| := \sup_{z\in D} |f_n(z) - f(z)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

και η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f αν η ακολουθία μερικών αθροισμάτων $\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

<u>Θεώρημα</u> $\boxed{\text{SOS}}$

Έστω $D \subset \mathbb{C}$ και $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε συγκλίνει

α) f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, τότε συγκλίνει και κατά σημείο στην f, δηλ. $\forall z \in D$: $f_n(z) \to f(z)$ $\left[\forall z \in D : |f_n(z) - f(z)| \le \|f_n(z) - f(z)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right.$

β) (Κριτήριο Cauchy) (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα $\Leftrightarrow$ (f_n) είναι ακολουθία Cauchy, δηλ. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n, m \in \mathbb{N}$ $n, m \geq n_0$: $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$

γ) (Κριτήριο Weierstrass) $\|f_n\| \le M_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty \Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα

δ) Αν οι f_n συνεχείς και $f_n \to f$ ομοιόμορφα, τότε και η f συνεχής

[$\overset{(\gamma)}{\Longrightarrow}$ Ο χώρος $(C(D), \|\cdot\|)$, D συμπαγές, όπου $\|\cdot\|$ είναι νόρμα, είναι ένας χώρος Banach, δηλαδή, ένας χώρος με μετρική ($\Rightarrow$ μετρική $\|f-g\|$) είναι πλήρης]

Απόδειξη (β):

($\rightarrow$)

Έστω $f_n \to f$ ομοιόμορφα (και $\varepsilon > 0$). Τότε $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n, m \geq n_0$:

$\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\|f_m - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \|f_n - f_m\| \underset{(*)}{\leq} \|f_n - f\| + \|f - f_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

[$(*)$ $\forall z \in D$ $|f_n(z) - f_m(z)| \leq |f_n(z) - f(z)| + |f(z) - f_m(z)| \leq \|f_n - f\| + \|f - f_m\|$

$\Rightarrow \|f_n - f_m\| \leq \|f_n - f\| + \|f - f_m\|$]

($\leftarrow$)

Έστω (f_n) ακολουθία Cauchy (ως προς $\|\cdot\|$) δηλαδή

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m, n \geq n_0$ $(|f_n(z) - f_m(z)| \leq)\ \|f_n - f_m\| < \varepsilon$ $\forall z \in D$, δηλ. η $(f_n(z)) \subset \mathbb{C}$ είναι ακολουθία Cauchy

$\underset{\mathbb{C} \text{ πλήρης}}{\Longrightarrow}$ $\forall z \in D$ $\exists!\ f(z) \in \mathbb{C}: f_n(z) \to f(z)$

Έτσι, ορίζεται μια (μοναδική) $f: D \to \mathbb{C}$ με $f_n \to f$ κατά σημείο

Θνδο $f_n \to f$ ομοιόμορφα. Αφού f_n ακολουθία Cauchy έχουμε:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n, m \geq n_0: \forall z \in D: |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon \Rightarrow$

$\forall z \in D: \lim\limits_{m \to \infty} |f_n(z) - f_m(z)| \leq \varepsilon \Rightarrow \left|\lim\limits_{m \to \infty}(f_n(z) - f_m(z))\right| =$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0$

$|f_n(z) - \underbrace{\lim\limits_{m \to \infty} f_m(z)}_{f(z)}| \leq \varepsilon$

Απόδειξη (γ): Θνδο. Η ακολουθία μερικών αθροισμάτων $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ είναι ακολουθία Cauchy (ως προς την νόρμα).

Το ίδιο ισχύει και για την $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} M_k\right)$ (στον $\mathbb{R}$). Αφού $\forall n, l \in \mathbb{N}$

$\forall z \in D$ $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+l} f_k(z)\right| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+l} |f_k(z)| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+l} \|f_k\| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+l} M_n \Rightarrow \left\|\sum\limits_{k=n+1}^{n+l} f_k\right\| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+l} M_n$

Πέμπτη 11/04/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 4η ώρα (Αναπλήρωση)

(δ) $f_n : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $f : D \to \mathbb{C}$

$f_n \to f$ ομοιόμορφα & f_n είναι συνεχείς $\Rightarrow f$ συνεχής

Προκύπτει από το λήμμα (με τη βοήθεια του οποίου προκύπτει και η «μεταφορά» και άλλων ιδιοτήτων των f_n στην f).

Λήμμα: $D \subset \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$ σημείο συσσώρευσης του D. Έστω $f_n, f : D \to \mathbb{C}$ με $f_n \to f$ ομοιόμορφα και $\forall n \in \mathbb{N}: \lim_{z \to a} f_n(z) = A_n \Rightarrow$

$\Rightarrow (A_n) \subset \mathbb{C}$ συγκλίνει και $\lim_{z \to a} f(z) = \lim_{n \to \infty} A_n$

[Άρα, αν f_n συνεχείς στο σημ. συσ. $a \in D$, τότε $\lim_{z \to a} f_n(z) = f_n(a) \Rightarrow$

$f_n \xrightarrow{\text{ομοιόμ.}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$

$\Longrightarrow \lim_{z \to a} f(z) = \lim_{n \to \infty} f_n(a) = f(a)$

Δηλαδή, Λήμμα $\Rightarrow \lim_{z \to a} f(z) = \lim_{n \to \infty} f_n(a) = f(a) \Rightarrow \lim_{z \to a} f(z) = f(a)$, δηλ. f συνεχής στο a.

Λήμμα — κατά σημείο σύγκλιση

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, $\exists\, n_0 : \forall n, m \geq n_0\ \forall z \in D$:

$|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon \underset{z \to a}{\Rightarrow} \left| \underbrace{\lim_{z \to a} f_n(z)}_{A_n} - \underbrace{\lim_{z \to a} f_m(z)}_{A_m} \right| \leq \varepsilon \Rightarrow |A_n - A_m| \leq \varepsilon/3$ και

$\forall z \in D : |f_n(z) - f(z)| \leq \|f_n - f\| < \varepsilon/3$ και γι' αυτό το $n \in \mathbb{N}$ $\exists\, \delta > 0$:

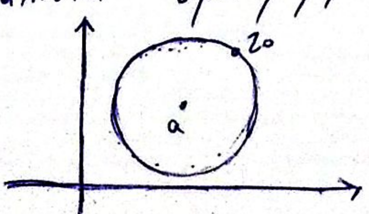
$\forall z \in D$, $0 < |z-a| < \delta : |f_n(z) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\quad [\forall n \in \mathbb{N}\ \lim_{z \to a} f_n(z) = A_n]$

$\Rightarrow \forall z \in D$, $0 < |z-a| < \delta : |f(z) - A| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - A_n| + |A_n - A| < \varepsilon$

Με τη βοήθεια του Θεωρήματος (ιδιότητες ομοιόμορφης σύγκλισης):

Πρόταση: Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ συγκλίνει σε κάποιο $z_0 \neq a$.

$\Rightarrow$ Η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα στον ανοικτό δίσκο $D(a, |z_0 - a|)$ και μάλιστα ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του δίσκου αυτού!



Απόδειξη: Αφού $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0-a)^n$ συγκλίνει $\Rightarrow c_n(z_0-a)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, c>0\ \forall n\in\mathbb{N}_0: |c_n|\cdot|z_0-a|^n \le c$

Αφού, ως γεωμετρική σειρά, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z-a|^n}{|z_0-a|^n}<+\infty$, $z\in D(a,|z_0-a|) \Leftrightarrow |z-a|<|z_0-a|$

και αφού $|c_n|\cdot|z_0-a|^n = |c_n|\cdot|z_0-a|^n\frac{|z-a|^n}{|z_0-a|^n} \le c\frac{|z-a|^n}{|z_0-a|^n} \Rightarrow$ [Από κριτήριο σύγκρισης ($|w_n|\le|z_n|$ και $\sum|z_n|<+\infty \Rightarrow \sum|w_n|<\infty$)] $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}|c_n||z_0-a|^n<+\infty$.

Λήμμα: Έστω $K\subset D(a,r)$, $r>0$, K συμπαγές μη κενό $\Rightarrow$
$\exists\, \rho\in(0,r): K\subset\overline{D}(a,\rho)$

Εφαρμογή του λήμματος: Έστω $K\subset D(a,|z_0-a|)$ συμπαγές $\xRightarrow{\text{Λήμμα}} \exists\, \rho\in(0,r): K\subset\overline{D}(a,\rho)$

$\Rightarrow \forall z\in K: |c_n|\cdot|z-a|^n\le|c_n|\cdot\rho^n = |c_n|\cdot r^n\frac{\rho^n}{r^n}$ με $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n<+\infty \xRightarrow{\text{Weierstrass}}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{c_n(z-a)^n}_{f(n)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο K ($\Rightarrow \|f_n\|\le c\left(\frac{\rho}{r}\right)^n = M_n$)

Πρόταση: Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ με κέντρο $a\in\mathbb{C}$ και συντελεστές $c_n\in\mathbb{C}$. Τότε το $R:=\sup\{r\ge0: (|c_n|\cdot r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ φραγμένη } (\subset\mathbb{R})\}$ $\in[0,+\infty]$ είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς,

δηλαδή:

α) αν $R\in(0,+\infty)$, η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα για $z\in D(a,R)$ και αποκλίνει για $z\in\mathbb{C}\setminus\overline{D}(a,R)$. [για $z\in\partial D(a,R)$ δεν αποφαίνεται η πρόταση]

β) αν $R=0$, η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο για $z=a$

γ) αν $R=+\infty$, η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα $\forall z\in\mathbb{C}$

Απόδειξη: Αν $R\in(0,+\infty]$ και $|z-a|<R$, τότε $\exists\, r\in(0,R)$ με $|z-a|<r(<R)$ και για $c>0$ με $|c_n|r^n\le c\ \ \forall n\in\mathbb{N} \xRightarrow{\text{κριτήριο σύγκρισης}}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|\cdot|z-a|^n = \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|\cdot r^n\frac{|z-a|^n}{r^n}\le\sum_{n=0}^{\infty} c\frac{|z-a|^n}{r^n}<+\infty$

Αν $R\in[0,+\infty)$ και $|z-a|>R$, η $(|c_n||z-a|^n)$ είναι μη φραγμένη $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ μη μηδενική, δηλ. η $c_n(z-a)^n$ είναι μη μηδενική ($\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ αποκλίνει)

Πέμπτη 11/04/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 5η ώρα

Αν $R=0$, τότε $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 0^n = c_0$ και $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot 0^n = |c_0|$

<u>Πρόταση</u>: Αν για την δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0 : c_n \neq 0$ και $\exists$ $R := \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \in [0,+\infty]$, τότε αυτό είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

<u>Απόδειξη</u>: Προκύπτει από το Κριτήριο του λόγου αφού για $z \neq a$

$$0 < |z-a| \lesseqgtr R \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}(z-a)^{n+1}|}{|c_n (z-a)^n|} = \frac{|z-a|}{R} \lesseqgtr 1 \quad \text{με } \frac{1}{+\infty} = 0, \ \frac{1}{0} = +\infty$$

<u>Πρόταση</u>: Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ είναι

$$\boxed{R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}} \quad \text{με } \frac{1}{+\infty} = 0, \ \frac{1}{0} = +\infty$$

<u>Απόδειξη</u>: $|z-a| \gtrless R \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n| \cdot |z-a|^n} = |z-a| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$

<u>Παρατήρηση</u>: i) Αν $R \in [0,+\infty]$ είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

(*) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ με $a \in \mathbb{C}$ και $(c_n) \subset \mathbb{C}$ τότε:

- ο ανοικτός κυκλικός δίσκος $D(a,R)$, αν $R = (0,+\infty)$
- το μονοσύνολο $\{a\}$, αν $R=0$
- το $\mathbb{C}$, αν $R=+\infty$

είναι υποσύνολα του πεδίου σύγκλισης $D := \{z \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \text{ συγκλίνει}\}$ της συνάρτησης $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, z \in D$ και ονομάζεται $D(a,R)$ δίσκος σύγκλισης της f (ή και της δ.σ.)

ii) Και από τους τρεις ισοδύναμους χαρακτηρισμούς της ακτίνας σύγκλισης της δ.σ. (*), προκύπτει ότι αυτή η δ.σ. εξαρτάται μόνο από τους συντελεστές (c_n) (και όχι από το κέντρο της)

iii) Αν $(c_n), (b_n) \subset \mathbb{C}$ ακολουθίες συντελεστών για δύο δ.σ. με ακτίνες σύγκλισης R_c, R_b αντίστοιχα και $|b_n| \leq |c_n|$ $\forall n \geq n_0$, τότε $R_c \leq R_b$ αφού $\forall r \geq 0$ $(|c_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη $\Rightarrow$ $(|b_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη (**)

iv) Για τις δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$ με ακτίνες σύγκλισης R, R' αντίστοιχα τότε: $\boxed{R = R'}$

Πράγματι, $z \neq a$: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1} = \frac{1}{z-a} \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^n$$

και αφού $|c_n| \leq n|c_n| \ \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow[\text{παρατήρηση}]{\text{προηγούμενη}} R' \leq R$

Έστω $R' < R \Rightarrow \exists \ r', r \in (0, +\infty) : R' < r' < r < R$ και αφού για $a \in (0,1)$

$\xrightarrow[\text{λόγου}]{\text{κριτήριο}} \dfrac{(n+1)\, a^{n+1}}{n a^n} = (1 + 1/n)\, a \longrightarrow a \in (0,1) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a^n < +\infty \Rightarrow n a^n \to 0$

Τότε η ακολουθία $n |c_n| (r')^n = n \left(\dfrac{r'}{r}\right)^n$ θα είναι φραγμένη το οποίο είναι άτοπο αφού $R' < r'$

Θεώρημα SOS Έστω η δ.σ. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, $(c_n) \subset \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$ με ακτίνα σύγκλισης $R \in (0, +\infty]$ και δίσκο σύγκλισης $D(a,R)$. Τότε, η συνάρτηση

$(*)$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ είναι συνεχής και ολόμορφη και η μιγαδική παράγωγός της είναι η $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$, $z \in D(a,R)$.

Επίσης, η $(*)$ είναι άπειρες φορές μιγαδικά διαφορίσιμη στο $D(a,R)$ με k τάξης ολόμορφη παράγωγο.

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} c_n \cdot (z-a)^{n-k}, \quad z \in D(a,R), \ k \in \mathbb{N}_0 \left[\Rightarrow c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\right]$$

Ακόμα, το ανάπτυγμα μιας συνάρτησης σε δ.σ. κέντρου $a \in \mathbb{C}$ και ακτίνας $R > 0$, αν υπάρχει, είναι μοναδικό.

Τέλος, η $(*)$ είναι άπειρες φορές $\mathbb{R}$-διαφορίσιμη στο $D(a,R)$, δηλαδή $f \in C^{\infty}(D(a,R))$

Παρασκευή 12/04/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 1η ώρα

1) $\underbrace{f_n}_{\in C(D)} \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} f \in C(D)$

2) Πρόταση: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ συγκλίνει σε κάποιο $z_0 \neq a$ => συγκλίνει απόλυτα στον $D(a,|z-a|)$ και συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $D(a,|z_0-a|)$

3) Κάθε δ.σ. έχει μια ακτίνα σύγκλισης $R \in [0,+\infty]$ όπου:
a) $R \in (0,+\infty) \Rightarrow$ η δ.σ. συγκλίνει απόλυτα στο $D(a,R)$ και αποκλίνει στο $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(a,R)$
β) $R=0 \Rightarrow$ η δ.σ. συγκλίνει (απόλυτα) μόνο για $z=a$
γ) $R=+\infty \Rightarrow$ η δ.σ. συγκλίνει απόλυτα σε όλο το $\mathbb{C}$

3') i) $R=\sup\{r \geq 0 : (|c_n| r^n \text{ φραγμένη}\}$
ii) Αν $c_n \neq 0 \ \forall n \geq n_0$ και $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \in [0,+\infty] \Rightarrow R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$
iii) $\boxed{R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}}$

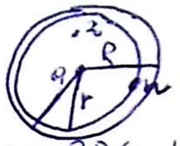
4) Οι δ.σ. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ και (αυτή που προκύπτει κατά όρο παραγώγιση) $\sum_{n=\phi}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$ έχουν ίση ακτίνα σύγκλισης

2ο βασικό θεώρημα της μιγ. αναλ. (μετά το C.R.)

Θεώρημα: $\boxed{\text{SOS}}$ Έστω δ.σ. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ με $R=(0,+\infty]$ και δίσκο σύγκλισης $D(a,R)$. Τότε, η $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, $z \in D(a,R)$ είναι (συνεχής και) ολόμορφη με μιγαδική παράγωγο

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}, \quad z \in D(a,R)$$

Απόδειξη: Ολόμορφη => συνεχής αλλά μπορούμε και ανεξ. να δείξουμε τη συνέχεια: Έστω $z_0 \in D(a,R) \Rightarrow \exists r \in (|z_0-a|, R)$ έτσι ώστε η f ως δ.σ. συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\overline{D}(a,r)$ και άρα και στον $D(a,r)$ (βλ. 1,2) και προκύπτει ότι η f είναι συνεχής στο $D(a,r)$ και άρα και στο $z_0 \in D(a,r)$



<u>Ολομορφία</u>: Έστω $z_0 \in D(a,R) \Rightarrow \exists\, r_0 \in (|z_0 - a|, R) \Rightarrow$

$\Rightarrow z_0 \in D(a,r)$ και $\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n| r^{n-1} < +\infty$ [αφού $\forall\, w \in \partial D(a,r)$. η $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (w-a)^{n-1}$ συγκλίνει απόλυτα (ορισμός ακτίνας σύγκλισης και ④]

Έστω $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $D(z_0,\varepsilon) \subset D(a,r)$. Τότε από την (*) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, $z \in D(a,R)$ προκύπτει $\forall\, z \in D(z_0,\varepsilon) \setminus \{z_0\}$ $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \dfrac{(z-a)^n - (z_0-a)^n}{(z-a)-(z_0-a)} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, g(z-a, z_0-a)$ με $g(w,w_0) = \dfrac{w^n - w_0^n}{w - w_0} = \sum_{k=0}^{n-1} w^k w_0^{n-1-k}$ Αν ξεκινούσαμε από $n=0$ ο 1ος όρος θα ήταν 0.

$\Rightarrow$ από την $\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n| r^{n-1} < +\infty$ και την $|g(w,w_0)| \le n \cdot r^{n-1}$, με Κριτήριο του Weierstrass προκύπτει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g(z-a, z_0-a)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\overline{D}(a,r)$

$\Rightarrow$ η συνάρτηση που ορίζεται από τη σειρά αυτή είναι συνεχής, δηλαδή, ειδικότερα:

$$\lim_{z \to z_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g(z-a, z_0-a) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z_0-a)^{n-1}$$

$$\text{Άρα } \underbrace{\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}_{f'(z_0)} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z_0-a)^{n-1}$$

Είδαμε: <u>Θεώρημα</u>: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = f(z)$ $z \in D(a,R)$, $R > 0$ ακτίνα σύγκλισης ($\Rightarrow$ συνεχής) με $f'(z) = \dfrac{d}{dz} f(z) =$ είναι ολόμορφη στο $D(a,R)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz}\left(c_n (z-a)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}, \quad z \in D(a,R)$$

<u>Πόρισμα</u>: 1) Η $f : D(a,R) \to \mathbb{C}$ είναι άπειρες φορές μιγαδικά διαφορίσιμη και είναι ολόμορφη με κ-τάξης μιγαδική παράγωγο η οποία με τον ίδιο δίσκο σύγκλισης δίνεται από την δυναμοσειρά

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} c_n (z-a)^{n-k}, \quad z \in D(a,R),\ k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},\ k \in \mathbb{N}_0$$

Παρασκευή 12/04/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 3η ώρα

γ) $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{n!}$, $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{z^n}{n!}$

$$c_n = \begin{cases} 1, & n=4k=2(2k) \\ 0, & n=4k+1, \\ -1, & n=4k+2,\ 2(2k+1) \\ 0, & n=4k+3,\ 2(2k+1)+1 \end{cases} \qquad d_n = \begin{cases} 0, & n=4k \\ 1, & n=4k+1 \\ 0, & n=4k+2=2(2k+1) \\ -1, & n=4k+3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_n + i d_n = \begin{cases} 1, & n=4k \\ i, & n=4k+1 \\ -1, & n=4k+2 \\ -i, & n=4k+3 \end{cases} = i^n \Rightarrow (c_n + i d_n)\frac{z^n}{n!} = \frac{(iz)^n}{n!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos z + i\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} =: F(iz) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

<u>Πρόταση</u>: Η εκθετική συνάρτηση $e^z = e^{\operatorname{Re}z + i\operatorname{Im}z} := e^{\operatorname{Re}z}(\cos(\operatorname{Im}z) + i\sin(\operatorname{Im}z))$ και $z \in \mathbb{C}$, αναπτύσσεται σε δ.σ. με κέντρο το 0 και ακτίνα σύγκλισης $+\infty$, ως $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $\forall z \in \mathbb{C}$

<u>Απόδειξη</u>: $\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \underset{1}{c_n} \frac{z^n}{n!}\right.$ συγκλίνει απόλυτα $\left.\forall z \in \mathbb{C}\right]$.

Θέτω $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Θνδο $e^z = F(z)$: $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι ακέραια (ως δ.σ. με ακτ. σύγκλισης $=+\infty$) με $F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = F(z)$

Για $c \in \mathbb{C}$, αλλά σταθερό, η συνάρτηση $f(z) := F(z) \cdot F(c-z)$, $z \in \mathbb{C} \Rightarrow f'(z) = F'(z) \cdot F(c-z) + F(z) \cdot F'(c-z) \Rightarrow$

$f'(z) = F(z) \cdot F(c-z) - F(z) F(c-z) = 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$

Ισχύει: <u>Πρόταση</u>: $f: D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με $f' = 0$ και $D \subset \mathbb{C}$ συνεκτικό $\Rightarrow f$: σταθερή

Απόδειξη:

$F(z)F(c-z) = f(z) = f(0) = F(0)F(c-0) = F(c)$

Θέτω $w = c-z$ έχω $F(z+w) = F(z)\cdot F(w) \quad \forall\, z,w \in \mathbb{C}$

Παρασκευή 12/04/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 2η ώρα

2) Το ανάπτυγμα μιας συνάρτησης σε δυναμοσειρά κέντρου a είναι μοναδικό

3) Η f είναι και άπειρες φορές $\mathbb{R}$-διαφορίσιμη, $f \in C^\infty(D(a,R))$

<u>Απόδειξη:</u> 1) Από το Θεώρημα έχουμε για $k=1$

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n!} c_{n+1} (z-a)^n, \ z \in D(a,R) \xrightarrow{\text{θεωρ.}} f' \text{ ολόμορφη και}$$

$$f''(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(n+1)!}{n!} c_{n+1} (z-a)^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \frac{n!}{(n-1)!} c_n (z-a)^{n-2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!} c_{n+2} (z-a)^n \xrightarrow{\text{θεώρημα}} \ldots \text{επαγωγικά} \Rightarrow (1)$$

2) Έστω $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \ [z \in D(a,R)]$

$= \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-a)^n, \ z \in D(a,R')$ με $R, R' > 0 \xRightarrow{(1)}$ η f είναι άπειρες φορές μιγ. διαφ. στο $D(a, \min\{R,R'\}) \Rightarrow c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = d_k \Rightarrow$

$\Rightarrow R = R'$

3) Προηγούμενο κεφάλαιο (C.R.)

f ολόμορφη στο $D(a,R) \Leftrightarrow f$ $\mathbb{R}$-διαφ. με C.R.

Αν $f = u + iv$, $\binom{u}{v} : D(a,R) \to \mathbb{R}^2$, $D(a,R) \subset \mathbb{R}^2$

$$f' = u_x + i v_x \overset{C.R.}{=} v_y + i(-u_y) \xRightarrow{(1)} f' \text{ ολόμορφη} \Rightarrow \text{συνεχής} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_x, u_y, v_x, v_y \in C(D(a,R)) \Rightarrow u, v \in C^1(D(a,R)) \xRightarrow{f' \text{ ολόμορφη}}$$

$$\Rightarrow f'' = u_{xx} + i v_{xx} = (v_x)_y + i(-(u_x)_y) = (v_y)_x + i(-u_y)_x \underset{C.R.}{=} (-u_y)_y + i(-(v_y)_y)$$

$$= v_{yx} + i(-u_{yx}) = -u_{yy} + i(-v_{yy}) \Rightarrow$$

Άρα $f'' = u_{xx} + i v_{xx} = v_{xy} + i(-u_{xy}) = v_{yx} + i(-u_{yx}) = -u_{yy} + i(-v_{yy}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta u = (\partial x^2 + \partial y^2) u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{με } u, v \in C^2(D(a,R))$$

$$\Delta v = (\partial x^2 + \partial y^2) \cdot v = v_{xx} + v_{yy} = 0$$

$\Leftrightarrow u, v$ αρμονικές (πραγματικές) συναρτήσεις συναρτήσεις στον κυκλικό δίσκο.

<u>Γενικά</u>, η αρμονική $\Leftrightarrow u \in C^2$ με $\Delta y = 0$

Συνεχίζοντας έτσι, προκύπτει ότι $u, v \in C^\infty(D(a,R))$.

Μια φορά μιγ. διαφ. $\Rightarrow$ Πάντα μιγ. διαφ.

Δυναμοσειρές βασικών συναρτήσεων

Ορισμός: Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις στο $\mathbb{C}$ ορίζονται ως:

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$ (συνημίτονο

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$ (ημίτονο

[Οι δυναμοσειρές συγκλίνουν $\forall z \in \mathbb{C}$, αφού είδαμε:

(c_n) φραγμένη $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$ συγκλίνουν απόλυτα στο $\mathbb{C}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Κριτήριο λόγου $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} < +\infty$

$\Big[z \neq 0 \quad \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|z|^n} = \frac{1}{n+1} |z| \to 0$

$z = 0$ Προφανές$\Big]$

+ Κριτήριο σύγκρισης: $|c_n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N},\ C > 0 \Rightarrow$

$|c_n| \frac{|z|^n}{n!} \leq C \frac{|z|^n}{n!}$ με $\sum_{n=0}^{\infty} C \frac{|z|^n}{n!} < +\infty$

Συνεπώς, για την cos έχουμε:, για την sin έχουμε:

$$\begin{cases} c_{2n} = (-1)^n, & n \in \mathbb{N}_0 \\ c_{2n+1} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} d_{2n} = 0 \\ d_{2n+1} = (-1)^n, & n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

[ότι αυτές οι δ.σ. στο $\mathbb{R}$ δίνουν τα γνωστά «γεωμετρικά» cos, sin αποδεικνύεται στα πλαίσια πραγμ. συν. πραγμ. μεταβλητής]

Ιδιότητες: α) $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$, $\forall z \in \mathbb{C}$

β) Θεώρημα + Πόρισμα $\Rightarrow$ $\cos: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\sin: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι ακέραιες (άπειρες φορές $\mathbb{C}$-διαφ και $\mathbb{R}$-διαφ$)_\infty$ με

$$(\cos z)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2n \frac{z^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n-1=0} (-1)^{n-1} \frac{z^{2(n-1)-1}}{(2(n-1)-1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (-1)^{-1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin z$$

Αντίστοιχα $(\sin z)' = \cos z$

Πέμπτη 18/04/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 1η ώρα

Ορίσαμε τις τριγων. συναρτήσεις

$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\forall z \in \mathbb{C}$

Επίσης, δείξαμε:

$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = f(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$

1) $F(z+w) = F(z) \cdot F(w)$ $\forall z, w \in \mathbb{C}$

2) $F(iz) = \cos z + i \sin z \Rightarrow F(z) = F(x+iy) = F(x) \cdot F(iy)$

<u>Παρατήρηση</u>: Το προηγούμενο μας λέει ότι το e^z, όπως το ορίσαμε από μέσω της $e^x, \cos y, \sin y$ για $x, y \in \mathbb{R}$ και θεωρώντας για γνωστά τα αναπτύγματα Taylor τους δείξαμε ότι $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Θα μπορούσαμε αυτό να χρησιμοποιήσουμε ως ορισμό και να πάρουμε $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

<u>Ιδιότητες</u>: (Από τα προηγούμενα προκύπτουν)

1) $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ $\forall z, w \in \mathbb{C}$

2) $e^{iz} = \cos z + i \cdot \sin z$ $\forall z \in \mathbb{C}$

3) $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

4) $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$

<u>Πρόταση</u>: $\forall z \in D(0,1)$: $\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{n} \cdot z^n$

<u>Απόδειξη</u>: Η ακτίνα σύγκλισης της δ.σ. είναι (βλ. σχετικό κριτήριο)

$R = \lim_{n \to \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ και έστω $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$, $z \in D(0,1)$

Θνδο $\log(1+\ ) = f$

Έχουμε (αφού $f =$ δ.σ.) f ολόμορφη στο δίσκο σύγκλισης

$$\Rightarrow f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-z)^{n-1} \underset{\substack{\text{γεωμετρική}\\ \text{σειρά}}}{=} \frac{1}{z+1}$$

Από την άλλη, $\log z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z$, $z \neq 0$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \Rightarrow \log(a+z)$ ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z \in -a + (-\infty, 0]\}$

$\left[a+z \in D \Leftrightarrow z = w - a,\ w \in D \Leftrightarrow z \in \underbrace{-a+D}_{\{w-a : w \in D\}} \right]$

Συνεπώς και η $\log(1+z)$ είναι ολόμορφη στο $D(0,1)$ με παράγωγο $(\log(1+z))' = \frac{1}{1+z} \Rightarrow f(z) = \log(1+z)$ ολόμορφη στο $D(0,1)$

__Ορισμός:__ Μια συνάρτηση $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, ονομάζεται αναλυτική, αν για κάθε $a \in D$ $\exists\ r(a) \in (0, +\infty]$: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(a)(z-a)^n$, $z \in D(a, r(a))$

__Θεώρημα:__ Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $f : D \to \mathbb{C}$. Τότε f αναλυτική $\Rightarrow f$ ολόμορφη και f άπειρες φορές μιγ. διαφ. με $f^{(k)} : D \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$ αναλυτική και $f \in C^{\infty}(D)$

__Απόδειξη:__ Έστω $a \in D$. Αφού f αναλυτική $\Rightarrow$
$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(a)(z-a)^n$, $z \in D(a, r(a)) \xRightarrow[\text{Πόρισμα 4.2.1.}]{\text{Θεώρημα 4.2.2.}}$ τα συμπεράσματα του θεωρήματος εδώ ισχύουν στο $D(a, r(a))$ δηλαδή τοπικά γύρω από κάθε σημείο a (σε μια ανοικτή περιοχή του a).
$\Rightarrow$ τα συμπεράσματα ισχύουν σε όλο το D

__Παρατήρηση:__ Θα δούμε (Θεωρία Cauchy) f ολόμορφη $\Rightarrow f$ αναλυτική

Πέμπτη 18/04/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 2η ώρα

Κεφάλαιο 5: Ολοκληρωτικό Θεώρημα Cauchy

(Θεωρία Cauchy για μιγ. συν., ειδικότερα: f ολόμορφη $\Rightarrow$ f αναλυτική)

§ Οι καμπύλες στο $\mathbb{C}$

Ορισμός: Έστω $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα. Μια συνεχής συνάρτηση $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ονομάζεται (παραμετρική) καμπύλη στο $\mathbb{C}$ και η εικόνα $C = \gamma(I) \subset \mathbb{C}$ καμπύλη (στο $\mathbb{C}$).

Παρατήρηση: $\boxed{\text{SOS}}$ Προφανώς, αφού $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ μια καμπύλη στο $\mathbb{C}$ αντιστοιχεί (1-1 και επί) σε μια καμπύλη στο $\mathbb{R}^2$.

$$\gamma(t) = Re\gamma(t) + i\, Im\gamma(t) = \begin{pmatrix} Re\gamma(t) \\ Im\gamma(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \forall\, t \in I$$

Συνεπώς, όσα ξέρουμε για καμπύλες στον $\mathbb{R}^2$ ισχύει και εδώ.

πχ γ συνεχής στο $t_0 \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap I$: $|\gamma(t) - \gamma(t_0)| < \varepsilon \iff \forall\, (t_n) \subset I,\ t_n \to t_0 : \gamma(t_n) \to \gamma(t_0)$

Ορισμός: α) Η καμπύλη που σχηματίζεται αν ενώσουμε $n+1$, $n \in \mathbb{N}$, διαφορετικά σημεία με ευθύγραμμα τμήματα ονομάζεται πολυγωνική γραμμή

β) Ένα ανοικτό $D \subset \mathbb{C}$ ονομάζεται συνεκτικό (ή τόπος ή χωρίο) αν για κάθε δύο σημεία του D, υπάρχει πολυγωνική γραμμή που τα ενώνει και βρίσκεται ολόκληρη στο D

πχ

D συνεκτικό

D όχι συνεκτικό

γ) Η $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ονομάζεται διαφορίσιμη στο $t \in I$ αν υπάρχει η παράγωγος της γ στο t

$$\gamma'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = (Re\gamma)'(t) + i\,(Im\gamma)'(t) = Re\gamma'(t) + i\, Im\gamma'(t)$$

η οποία αντιστοιχεί στο εφαπτόμενο διάνυσμα $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^2$ της γ στο σημείο t.

δ) Η $\gamma: I \to \mathbb{C}$ ονομάζεται συνεχώς διαφορίσιμη ή C^1 καμπύλη $\gamma \in C^1(I)$, αν $\gamma': I \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής ($\iff Re\gamma': I \to \mathbb{R}$, $Im\gamma': I \to \mathbb{R}$ συνεχείς) και κανονική αν είναι C^1 και $\gamma'(t) \neq 0 \ \forall \ t \in I$

<u>Πρόταση</u> (Άσκηση)

$$(\gamma_1 + \gamma_2)'(t) = \gamma_1'(t) + \gamma_2'(t)$$

$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2)'(t) = \gamma_1'(t)\gamma_2(t) + \gamma_1(t)\gamma_2'(t)$$

$$\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)'(t) = \frac{\gamma_1'(t)\cdot\gamma_2(t) - \gamma_1(t)\cdot\gamma_2'(t)}{(\gamma_2(t))^2}, \quad \gamma_2(t) \neq 0$$

και (sos) κανόνας της αλυσίδας:

για $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, μιγ. διαφ. στο $\gamma(t) \in D$ και $\gamma: I \to D$ διαφορίσιμη στο $t \in I$ ισχύει:

$$\boxed{(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}$$

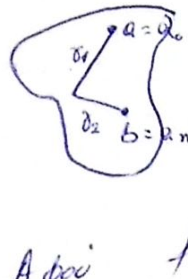
Τον όρο μιγ. διαφ. τον χρησιμοποιώ για σημείο και τον όρο ολομορφία για ανοικτά διαστήματα

<u>Πρόταση</u>: $D \subset \mathbb{C}$ τόπος (ανοικτό σύνολο) και $f: D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με $f' = 0$ $\Rightarrow f$ σταθερή, $f(z) = f(a) \ \forall \ z \in D$, $(a \in D)$

Πέμπτη 18/04/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 3^{η} ώρα (Αναπλήρωση)

Πρόταση: Έστω $D \subset \mathbb{C}$ τόπος (= ανοικτό και συνεκτικό) και $f: D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και $f' = 0$. Τότε η f είναι σταθερή.

Απόδειξη: Έστω δύο σημεία $a, b \in D$ τα οποία συνδέονται με μια πολυγωνική γραμμή $\underbrace{\gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_n}_{\text{Η ένωση των καμπυλών}}$ = ευθ. τμήμα που βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο D.



$$\gamma_k(t) = a_{k-1} + t(a_k - a_{k-1}), \quad t \in [0,1]$$

$$\gamma_k'(t) = a_k - a_{k-1}, \quad a_0 = a, \ a_n = b, \ k = 1, \dots, n$$

Αφού $f' = 0$ στο D και ισχύει $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \gamma'(t) = 0$

$$\Leftrightarrow Re(f\circ\gamma)'(t) + i\, Im(f\circ\gamma)'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} Re(f\circ\gamma)'(t) \\ Im(f\circ\gamma)'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow{\text{Θ.Θ.Α.Λ.}} f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} (f\circ\gamma_k)(1) - (f\circ\gamma_k)(0) = (Re\, f\circ\gamma_k)(1) - (Re\, f\circ\gamma_k)(0) +$$

$$+ i\big((Im\, f\circ\gamma_k)(1) - (Im\, f\circ\gamma_k)(0)\big) = \int_0^1 (Re\, f\circ\gamma_k)'(t)\,dt + i\int_0^1 (Im\, f\circ\gamma_k)'(t)\,dt$$

... για κάθε $b \in D$ έχουμε $f(a) = f(b) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Για σταθερό $a \in D$ και για κάθε

$\Rightarrow f(z) = f(a) \quad \forall z \in D \Rightarrow f$ σταθερό

Ολοκληρώματα Καμπύλης (≠ επικαμπύλιο ολοκλήρωμα)

Ορισμός: α) Μια καμπύλη $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ ονομάζεται κατά τμήματα C^1, αν υπήρχε διαμέριση $a = t_0 < t_1 \dots < t_{n-1} < t_n = b$ έτσι ώστε οι

$\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{C}$ είναι κατά τμήματα $C^1 :\Leftrightarrow$

β) $\gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι C^1.

$\Leftrightarrow$ οι $\gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{C}$ είναι C^1 καμπύλη αυτή του (β) έχει μήκος:

γ) Η κατά τμήματα

$$L(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} L(\gamma_i) = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} |\gamma_i'(t)|\,dt$$

Παράδειγμα: 1) Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα $a,b\in\mathbb{C}$

$\gamma(t)=a+t(b-a)\ ,\ t\in[0,1]$

$\gamma'(t)=b-a$

$L(\gamma)=\int_0^1 |b-a|dt=|b-a|$

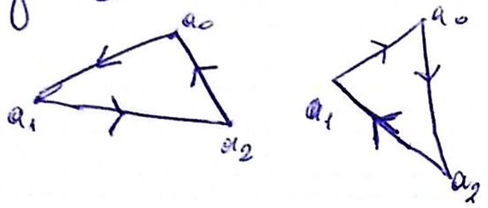
Συμβολισμός για την γ:

$[a,b]:=\gamma$ (και για το σύνολο $\gamma([0,1])=\{a+t(b-a):t\in[0,1]\}$)

Προσοχή: Ο συμβολισμός αυτός υποδηλώνει και τον προσανατολισμό της καμπύλης

Πχ Μπορούμε να συμβολίσουμε την πολυγωνική γραμμή που ενώνει τα σημεία $a_0,a_1,\dots,a_n$ με αυτή τη σειρά ως

$\gamma=[a_0,a_1]\oplus[a_1,a_2]\oplus\dots\oplus[a_{n-1},a_n]\neq\gamma'=[a_0,a_2]\oplus[a_2,a_1]\oplus[a_1,a_0]$



2) Κύκλος κέντρου $a\in\mathbb{C}$ και ακτίνας $r>0$:

$\gamma(t)=a+r\cdot e^{it}\ ,\ t\in[0,2\pi]$ με $\gamma'(t)=r\cdot ie^{it}$ (*) , $L(\gamma)=2\pi$

$\downarrow$

Αυτό είναι κύκλος αφού: $\gamma(t)-a=re^{it}\Rightarrow|\gamma(t)-a|=|r\cdot e^{it}|=r\cdot|e^{it}|=r\cdot(\cos^2t+\sin^2t)=r$

(*) Τετριμμένα αλλά ας το δούμε παραδειγματικά:

$$\gamma'(t)=\lim_{h\to0}\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}=r\cdot\lim_{h\to0}\frac{e^{i(t+h)}-e^{it}}{h}=r\cdot\lim_{h\to0}\frac{(\cos(t+h)-\cos t)+i(\sin(t+h)-\sin t)}{h}=$$

$$=r\cdot\left(\lim_{h\to0}\frac{\cos(t+h)-\cos t}{h}+i\cdot\lim_{h\to0}\frac{\sin(t+h)-\sin t}{h}\right)=r\begin{pmatrix}\lim_{h\to0}\frac{\cos(t+h)-\cos t}{h}\\ \lim_{h\to0}\frac{\sin(t+h)-\sin t}{h}\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$

$$=r(-\sin t+i\cos t)=ri(\cos t+i\sin t)$$

Πέμπτη 18/04/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 4η ώρα

<u>Ορισμός</u>: Έστω μια καμπύλη $\gamma = u + iv : [a, b] \to \mathbb{C}$ (δηλ. $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$).

Ονομάζουμε $\boxed{\text{ολοκλήρωμα της καμπύλης } \gamma}$ τον <u>μιγαδικό αριθμό</u>:

(διαφ. από επικαμπύλιο ολοκλήρωμα)

$$\int_a^b \gamma(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

[Αντιστοιχεί στο ολοκλήρωμα $\int_a^b \bar{\gamma}(t)dt := \begin{pmatrix} \int_a^b \gamma_1(t)dt \\ \int_a^b \gamma_2(t)dt \end{pmatrix}$ με $\gamma_1 = u$, $\gamma_2 = v$, $\bar{\gamma} = \gamma$]

<u>Πρόταση</u>: (Ιδιότητες)

1) $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to \mathbb{C}$: $\int_a^b \big((\lambda\gamma_1)(t) + (\mu\gamma_2)(t)\big)dt = \lambda\int_a^b \gamma_1(t)dt + \mu\int_a^b \gamma_2(t)dt$

2) $\int_a^b \gamma(t)dt = \int_a^s \gamma(t)dt + \int_s^b \gamma(t)dt$, $s \in [a, b]$

3) Θ.Θ.Α.Λ.: $\gamma(b) - \gamma(a) = \int_a^b \gamma'(t)dt$

4) (Σημειώσεις Α.Λ.III, Λήμμα 3.7.2)

Τριγωνική ανισότητα για ολοκληρώματα καμπυλών

$$\left| \int_a^b \gamma(t)dt \right| \leq \int_a^b |\gamma(t)|dt$$

<u>Απόδειξη</u>: Για τα 1-3 χρησιμοποιούμε τις αντίστοιχες ιδιότητες $\int_a^b f(t)dt$ για $f : [a, b]$

4) Ή με λήμμα 3.7.2 ή ως εξής:

Έστω $\int_a^b \gamma(t)dt \neq 0$. Θέτουμε $\lambda = \dfrac{|\int_a^b \gamma(t)dt|}{\int_a^b \gamma(t)dt}$ με $|\lambda| = 1$ και έχουμε:

$$\left|\int_a^b \gamma(t)dt\right| = \lambda \cdot \int_a^b \gamma(t)dt = Re\left(\lambda \cdot \int_a^b \gamma(t)dt\right) = Re\left(\int_a^b \lambda\gamma(t)dt\right) = \int_a^b Re(\lambda\gamma(t))dt \leq$$

$$\leq \int_a^b |\lambda\gamma(t)|dt = \int_a^b |\lambda| \cdot |\gamma(t)|dt = \int_a^b |\gamma(t)|dt$$

Παράδειγμα: 1) $\gamma(t) = a + (b-a)t,\ t \in [0,1]$

$$\int_0^1 (a + t(b-a))dt = \int_0^1 a\,dt + \int_0^1 t(b-a)dt = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

2) $\gamma(t) = a + r \cdot e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$ $\quad \int_0^{2\pi} (a + re^{it})dt = 2\pi a$

αφού $\frac{d}{dt} e^{i\lambda t} = i\lambda \cdot e^{i\lambda t},\ \lambda \in \mathbb{C} \overset{\lambda \neq 0}{\Longrightarrow} \int_a^b e^{i\lambda t} dt = \frac{1}{i\lambda}\left(e^{i\lambda b} - e^{i\lambda a}\right)$

$\Rightarrow \int_a^b e^{i\lambda t} dt = 0 \iff \lambda(b-a) = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ αφού

$\int_a^b e^{i\lambda t} dt = \frac{1}{i\lambda}\left(e^{i\lambda b} - e^{i\lambda a}\right) = 0 \iff e^{i\lambda b} = e^{i\lambda a} \iff e^{i\lambda(b-a)} = 1 \iff$

$\iff e^{i\lambda(b-a)} = e^{i2k\pi} \iff \lambda(b-a) = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \gamma(t)dt = \int_0^{2\pi} a\,dt + \cancel{r\int_0^{2\pi} e^{it} dt} = \int_0^{2\pi} a\,dt = 2\pi a$$

Ορισμός: Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ μια κατά τμήματα C^1 καμπύλη με $\gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{C}$ και $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \ldots \oplus \gamma_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ $\boxed{\text{μιγαδικό επικαμπύλιο}}$ συνεχής. Ονομάζουμε $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ τον μιγαδικό αριθμό: κατά μήκος της γ ολοκλήρωμα της f

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z)dz := \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} f(\gamma_i(t)) \cdot \gamma_i'(t)\,dt$$

[δηλαδή $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, C^1 καμπύλη, $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ συνεχής

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b \underbrace{\underset{\in\mathbb{C}}{f(\gamma(t))} \cdot \underset{\in\mathbb{C}}{\gamma'(t)}}_{\in \mathbb{C}} dt \text{]}$$

Επικαμπύλιο ολοκλ.
της f επί της γ

Πέμπτη 18/04/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 5η ώρα

Ποια η σχέση του μιγαδ. επικ. ολοκλ. με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικού πεδίου στον $\mathbb{R}^2$;

$$\int_\gamma \underbrace{f(z)}_{u(x,y)+iv(x,y)}\,dz = \int_a^b f(\underbrace{\gamma(t)}_{x(t)+iy(t)})\cdot \underbrace{\gamma'(t)}_{x'(t)+iy'(t)}\,dt = \int_a^b \big(u(\gamma)+iv(\gamma)\big)(x'+iy')\,dt =$$

$$= \int_a^b \Big((ux'-vy') + i(vx'+y'u)\Big)dt = \int_a^b \begin{pmatrix}u\\-v\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{pmatrix}dt + i\int_a^b \begin{pmatrix}v\\u\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{pmatrix}dt =$$

$$= \int_\gamma \begin{pmatrix}u\\-v\end{pmatrix}\cdot d(x,y) + i\int_\gamma \begin{pmatrix}v\\u\end{pmatrix}\cdot d(x,y)$$

Άρα $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \begin{pmatrix}u\\-v\end{pmatrix}\cdot d(x,y) + i\int_\gamma \begin{pmatrix}v\\u\end{pmatrix}\cdot d(x,y)$ όπου τα επικ. ολοκλ. του διαν. πεδίου $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ επί της καμπύλης γ είναι:

$$\int_\gamma \underbrace{\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}}_{\vec f}\cdot d(x,y) = \int_a^b \underbrace{\begin{pmatrix}u(\gamma(t))\\v(\gamma(t))\end{pmatrix}}_{\vec f(\gamma(t))}\cdot \underbrace{\gamma'(t)}_{\begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\\gamma_2(t)\end{pmatrix}}\,dt$$ θεωρώντας τη γ ως καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$

Πρόταση: (Ιδιότητες)

$f,g:\gamma([a,b])\to\mathbb{C}$ συνεχείς

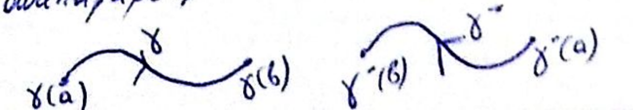
1) $\int_\gamma (\lambda f+\mu g)\,dz = \lambda\int_\gamma f\,dz + \mu\int_\gamma g\,dz$

2) Αν $\gamma_1\oplus\gamma_2=\gamma \Rightarrow \int_\gamma f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz+\int_{\gamma_2} f\,dz$

3) $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \underbrace{\|f\|}_{\max|f(\gamma(t))|}\cdot L(\gamma)$

4) $\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$, όπου $\gamma^-(t)=\gamma(a+b-t)$, $t\in[a,b]$ η αντίθετη καμπύλη της γ, δηλ. με αντίθετο προσανατολισμό

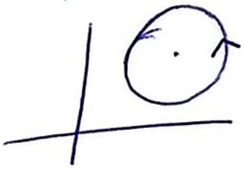
5) Αν $\phi:[A,B]\to[a,b]$ είναι ένας C^1 παραμ. μετασχ. που διατηρεί τον προσανατολισμό, δηλ. μια 1-1 και επί συνεχώς διαφορίσιμη αύξουσα πραγμ. συνάρτηση. Τότε η αναπαραμετρικοποίηση ($\phi'(t)>0\ \forall t\in[A,B]$) της γ.



$\gamma\circ\phi:[A,B]\to\mathbb{C}$ είναι μια C^1 καμπύλη και $\int_{\gamma\circ\phi} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$

$\Rightarrow$ Αν για μια καμπύλη ξέρουμε ή έχουμε συμφωνήσει ποιος είναι ο προσανατολισμός, μπορούμε αντί για την καμπύλη $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ να χρησιμοποιούμε στον συμβ. του ολοκλ. την (εικόνα της γ στο $\mathbb{C}$) καμπύλη $\gamma([a,b])\subset\mathbb{C}$.

Σύμβαση: $\int_{\partial D(a,r)} f(z)dz := \int_\gamma f(z)dz$, όπου $\gamma(t)=a+r\cdot e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$ η οποία διατρέχει τον κύκλο $\partial D(a,r)$ με τον καθιερωμένα θετικό προσανατολισμό, δηλ. το εσωτερικό του κύκλου $D(a,r)$ είναι πάντα στα αριστερά μας



$[\gamma^-(t)=a+r\cdot e^{-it},\ t\in[0,2\pi]]$

Απόδειξη: Προκύπτει από τις αντίστοιχες ιδιότητες επικ. ολοκλ. διαν. πεδίων στον $\mathbb{R}^2$.

Ηθικό δίδαγμα: Στον υπολογισμό ενός επικ. ολοκ. μιγαδ. συναρ. δεν παίζει ρόλο πως θα παραμ/σω την καμπύλη εκτός αν αλλάξω τον προσανατολισμό και πάρω τον αντίθετο, οπότε αλλάζει το πρόσημο.

Πχ $\int_{[a,b]} f(z)\,dz = -\int_{[b,a]} f(z)dz$

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,dt \le \|f\|\cdot\int_a^b|\gamma'(t)|\,dt = \|f\|\cdot L(\gamma)$$

Η βασικότερη όμως ιδιότητα για όλη τη θεωρία Cauchy είναι ότι τα επικαμπύλια ολοκλ. της παραγώγου μιας ολόμορφης συνάρτησης είναι ανεξαρτήτου του δρόμου.

[Υπενθύμιση: τα επικ. ολοκ. πεδίων κλίσεων, δηλ. $\vec{f}(x,y)=\nabla\phi(x,y)$ είναι ανεξ. του δρόμου]

Ορισμός: Έστω $D\subset\mathbb{C}$ ανοικτό. Η $f:D\to\mathbb{C}$ ονομάζεται (μιγαδικά) ολοκληρώσιμη αν $\exists$ μια $F:D\to\mathbb{C}$, η παράγουσα ή αντιπαράγωγος της f, έτσι ώστε $F'=f$.

F παράγουσα της $f \iff f$ ολοκλ. $\iff \forall\,\gamma([a,b])\subset D: \int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b))-F(\gamma(a))$

Παρασκευή 19/04/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 1η ώρα

Ορισμός: $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $f: D \to \mathbb{C}$ ονομάζεται ολοκληρώσιμη αν υπάρχει μια παράγουσα ή αντιπαράγωγος της f, $F: D \to \mathbb{C}$ έτσι ώστε $F' = f$.

Θεώρημα: Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $f: D \to \mathbb{C}$ συνεχής. Τότε η $F: D \to \mathbb{C}$ είναι παράγουσα της f $\iff$ για κάθε κατά τμήματα C^1 καμπύλη $\gamma: [a,b] \to D$

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

[τα επικαμπύλια ολοκλ. της $\underbrace{\text{παραγώγου}}_{f}$ μιας $\underbrace{\text{ολόμορφης}}_{F}$ συνάρτησης είναι ανεξάρτητο του δρόμου]

Απόδειξη: $(\to)$ Έστω $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_n$, $\gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{C}$, C^1 καμπύλες $\forall i = 1, \dots, n$ με $\gamma(a) = \gamma_1(a_1)$, $\gamma(b) = \gamma_n(b_n)$

$i = 1, \dots, n \Rightarrow \gamma_{i-1}(b_{i-1}) = \gamma_i(a_i)$

$$\int_\gamma F'(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt \overset{\text{Θ.Θ.Α.Λ.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(F(\gamma_i(b_i)) - F(\gamma_i(a_i)) \right) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

$(\leftarrow)$ Έστω $c \in D$ και $D(r,\delta) \subset D$, $\delta > 0$. Τότε $F(z) = F(c) + \int_{[c,z]} f(\zeta)d\zeta$.

$z \in D(c,\delta) \iff F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = \int_\gamma f(\zeta)d\zeta$, $\underset{[c,z]}{\gamma(t)} = c + t(z-c)$, $t \in [0,1]$

Για τη συνάρτηση $F_1(z) = \begin{cases} \frac{1}{z-c} \int_{[c,z]} f(\zeta)d\zeta, & z \in D(c,\delta) \setminus \{c\} \\ f(c), & z = c \end{cases}$

~~Ισχύει $F(z) = F(c) + (z-c)F_1(z)$, $z \in D(c,\delta)$~~

~~Συνεπώς, αν δ.ο. η F_1 είναι συνεχής στο c, θα έχουμε $F'(c) = f(c)$~~

~~[$F_1(z) = \frac{F(z) - F(c)}{z-c}$, $z \in D(c,\delta) \setminus \{c\} \Rightarrow \lim_{z \to c} F_1(z) = \lim_{z \to c} \frac{F(z)-F(c)}{z-c}$]~~

$F_1(z) - F_1(c) = \frac{1}{z-c} \int_{[c,z]} (f(\zeta) - f(c))d\zeta$, $z \in D(c,\delta) \setminus \{c\} \Rightarrow$

Έχουμε $|F_1(z) - F_1(c)| \le \frac{1}{|z-c|} \left| \int_{[c,z]} (f(\zeta) - f(c))d\zeta \right| \le \frac{1}{|z-c|} \| f - f(c) \|_{[c,z]} |z-c| \le \| f - f(c) \| \cdot |z-c|$

$\Rightarrow$ Αφού f συνεχής στο $c \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0: \|f-f(c)\|_{D(c,\delta)}<\varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sup_{\zeta\in D(c,\delta)} |f(\zeta)-f(c)|<\varepsilon \Rightarrow f$ συνεχής στο c.

Θεώρημα 2: Έστω $D\subset\mathbb{C}$ τόπος και $f: D\to\mathbb{C}$ συνεχής. Τότε:
f ολοκληρώσιμη $\Leftrightarrow$ για κάθε κλειστή κατά τμήματα C^1 καμπύλη $K=\gamma([a,b])\subset D$: $\int_K f(z)dz=0$

Τότε για οποιοδήποτε σταθερό $a\in D$ και για κάθε $z\in D$ οποιαδήποτε κατά τμήματα C^1 καμπύλη $\gamma_z\subset D$ με αρχή a και τέλος z η συνάρτηση $F(z)=\int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta$ είναι παράγουσα της f.

Απόδειξη: $(\rightarrow)$ Προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 1.

$(\leftarrow)$ Έστω $\gamma:[a,b]\to D$ κατά τμήματα C^1 με $w=\gamma(a)$ κατά τμήματα C^1 με αρχή το a

$z=\gamma(b)$ και έστω γ_w και γ_z κατά τμήματα C^1 με αρχή το a και τέλος τα w και z.

Τότε, από υπόθεση, η $\gamma_w\oplus\gamma\oplus\gamma_z^-$ είναι κλειστή κατά τμήματα C^1

$$\Rightarrow 0=\underbrace{\int_{\gamma_w} f(\zeta)d\zeta}_{=:F(w)}+\int_\gamma f(\zeta)d\zeta-\underbrace{\int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta}_{=:F(z)=F(\gamma(a))} \Leftrightarrow \int_\gamma f(\zeta)d\zeta=F(\gamma(b))-F(\gamma(a))$$

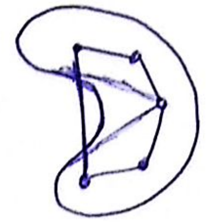
Συνεπώς, αφού ισχύει η δεξιά πλευρά της ισοδ. στο Θεωρ. 1, προκύπτει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη με παράγουσα την F.

Ορισμός: Ένα $D\subset\mathbb{C}$ λέγεται αστερόμορφο, αν $\exists\, a\in\mathbb{C}$ (το κέντρο του αστερόμορφου D): $\forall z\in D: [a,z]\subset D$ το ευθύγραμμο τμήμα $[a,z]$ να βρίσκεται ολόκληρο στο D.

Παρατήρηση: 1) D ανοικτό αστερόμορφο $\Rightarrow D$ τόπος (ανοικτό και συνεκτικό)
2) D κυρτό $\Rightarrow D$ αστερόμορφο $\forall z,w\in D: [z,w]\subset D$
3) $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ αστερόμορφος αλλά όχι κυρτός τόπος με κέντρο κάθε $x>0$
4) $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ όχι αστερόμορφος $\Rightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\}$ όχι κυρτός

Από (1), (2) για D ανοικτό προκύπτει: κυρτό $\Rightarrow$ αστερόμορφο $\Rightarrow$ συνεκτικό
($\forall z,w \ \exists$ πολ. γραμμή $\subset D$) που ενώνει τα z,w

Παρασκευή 19/04/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 2η ώρα

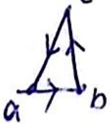


όχι κυρτό
συνεκτικό
αστερόμορφο με κέντρο a

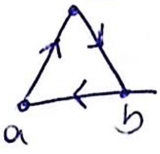
<u>Ορισμός</u>: Αν $a,b,c \in \mathbb{C}$, θα συμβολίζουμε με $\Delta = \Delta[a,b,c] = \{z \in \mathbb{C} : z = \kappa a + \lambda b + \mu c,\ \kappa,\lambda,\mu \geq 0,\ \kappa+\lambda+\mu = 1\} = \{z \in \mathbb{C} : a + s(b-a) + t(c-a),\ s,t \geq 0,\ s+t \leq 1\}$ και με $\partial\Delta := [a,b] \oplus [b,c] \oplus [c,d]$ το προσανατολισμένο σύνορο του Δ.

<u>Παρατήρηση</u>: Το αν το $\partial\Delta$ είναι προσανατολισμένο με τον μαθηματικά θετικό ή αρνητικό προσανατολισμό και εξαρτάται από τη θέση των a,b,c.

Άρα $\Delta[a,b,c] \Rightarrow \partial\Delta$ είναι προσανατολισμένο με τη σειρά $a \to b \to c$



μαθηματικά θετικός προσανατολισμός



μαθηματικά αρνητικός προσανατολισμός

<u>Θεώρημα 3</u>: <u>Κριτήριο ολοκληρωσιμότητας για αστερόμορφους τόπους (⇒ ανοικτά)</u>

Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ένας αστερόμορφος τόπος με κέντρο $a \in D$ και $f: D \to \mathbb{C}$ συνεχής με $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ για κάθε συμπαγές τρίγωνο $\Delta \subset D$ που έχει το a ως κορυφή $\Rightarrow f$ ολοκληρώσιμη με παράγουσα $F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)d\zeta,\ z \in D \Rightarrow \forall\, \gamma \subset D$ κατά τμήματα C^1 κλειστή

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Απόδειξη: Έστω ένα $c \in D$ και $D(c,\delta) \subset D$, $\delta > 0$.

Τότε, $\Delta[a,c,z] \subset D \quad \forall z \in D(c,\delta)$

$$\left[z \in D(c,\delta),\ z_a := (1-a)c + az \in D(c,\delta) \subset D \quad \forall a \in [0,1] \ \boxed{|z_a - c| = a|z-c| < \delta} \right.$$

$$\left. \text{και } \Delta[a,c,z] = \bigcup_{a \in [0,1]} \{ z \in \mathbb{C} : z = (1-b)a + b z_a,\ b \in [0,1] \} \right]$$

Συνεπώς, από την υπόθεση έχουμε ότι:

$$\underbrace{F(z)}_{\int_{[a,z]}} = \underbrace{F(c)}_{\int_{[a,c]} = -\int_{[c,a]}} + \underbrace{\int_{[c,z]} f(\zeta)d\zeta}_{-\int}, \quad z \in D(c,\delta) \subset D \qquad \left[\int_{[a,c]} f d\zeta + \int_{[c,z]} f d\zeta + \int_{[z,a]} f d\zeta = 0 \right]$$

Παράδειγμα $\boxed{\text{SOSARA}}$

Έστω $z \in \mathbb{C}$ και $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ κατά τμήματα C^1

Τότε: a) $\forall n \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\} \quad \int_\gamma (\zeta - z)^n d\zeta = \frac{1}{n+1}\left((\gamma(b)-z)^{n+1} - (\gamma(a)-z)^{n+1} \right)$

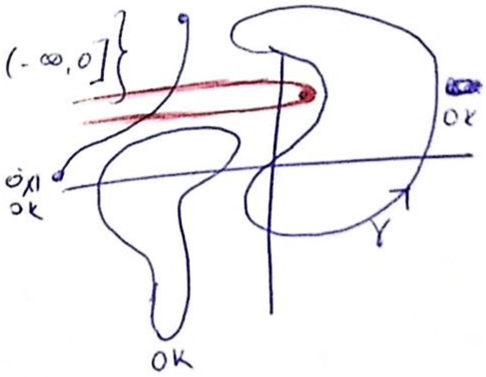
b) $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ και $\gamma[a,b] \subset \mathbb{C} \setminus \{z\}$

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^n} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{(\gamma(a)-z)^{n-1}} - \frac{1}{(\gamma(b)-z)^{n-1}} \right)$$

γ) $\gamma([a,b]) \subset z + \left(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \right) = z + \{ w \in \mathbb{C} : w \notin (-\infty,0] \} =$

$= \mathbb{C} \setminus (z + (-\infty, 0]) = \mathbb{C} \setminus \{ \zeta \in \mathbb{C} : \zeta \in z + (-\infty, 0] \}$

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \log(\gamma(b)-z) - \log(\gamma(a)-z)$$



$$F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = \int_\gamma F'(\zeta)d\zeta$$

a) $F(\zeta) = \frac{1}{n+1}(\zeta - z)^{n+1} \Rightarrow F'(\zeta) = (\zeta - z)^n \quad \forall z, \zeta \in \mathbb{C}$

b) $F(\zeta) = -\frac{1}{n+1} \frac{1}{(\zeta - z)^{n-1}} \Rightarrow F'(\zeta) = \frac{1}{(\zeta - z)^n} \quad \forall \zeta, z \in \mathbb{C}$ με $\zeta \neq z$

γ) $F(\zeta) = \log(\zeta - z), \quad \zeta - z \notin (-\infty, 0] \Rightarrow \zeta \notin z + (-\infty, 0]$

$F'(\zeta) = \frac{1}{\zeta - z} \Rightarrow F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = \int_\gamma F'(\zeta)d\zeta = \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}dz \Rightarrow \log(\gamma(b)-z) - \log(\gamma(a)-z) = \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}d\zeta$

Πέμπτη 09/05/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 1η ώρα

<u>Θεώρημα 1</u>: $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $f: D \to \mathbb{C}$ συνεχής και $F: D \to \mathbb{C}$. Τότε η F είναι παράγουσα της f ($:\Leftrightarrow F' = f$) $\Leftrightarrow$ $\forall$ κατά τμ. C^1 καμπύλη $\gamma: [a,b] \to D$

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

<u>Πρόταση 2</u>: $D \subset \mathbb{C}$ τόπος (= ανοικτό και συνεκτικό), $f: D \to \mathbb{C}$ συνεχής. Τότε: η f είναι ολοκληρώσιμη ($:\Leftrightarrow \exists$ παράγουσα $F: D \to \mathbb{C}$ της f) $\Leftrightarrow$ $\forall$ κλειστή κ.τ. C^1 καμπύλη, $\gamma: [a,b] \to D$

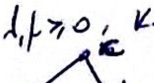
$$\int_k f(z)dz = 0$$

Επίσης, τότε, $\forall$ σταθερό $a \in D$ και $\forall$ $z \in D$ και για οποιαδήποτε κ.τ. C^1 καμπύλη γ_z στο D με αρχή και τέλος z, η συνάρτηση $F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta$, $z \in D$ είναι παράγουσα της f.

<u>Πρόταση 3</u>: $D \subset \mathbb{C}$ αστερόμορφο ($\exists$ $a \in D$ (κέντρο): $[a,z]$ (ευθ. τμ. με αρχή a και τέλος z) $\subset D$ $\forall$ $z \in D$) και $f: D \to \mathbb{C}$ συνεχής με $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ για κάθε συμπαγές τρίγωνο $\Delta \subset D$(*) που έχει το a ως κορυφή.
Τότε, η f είναι ολοκληρώσιμη με παράγουσα $F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)d\zeta$, $z \in D$

Ειδικότερα, $\forall$ κάθε κ.τ. C^1 καμπύλη $k \subset D$ ισχύει $\int_k f(z)dz = 0$

* : $\Delta = \Delta[a,b,c] = \{z \in \mathbb{C} : z = \kappa a + \lambda b + \mu c,\ \kappa, \lambda, \mu \geq 0,\ \kappa + \lambda + \mu = 1\}$



δηλ, Δ - κυρτή θήκη του $\{a,b,c\}$

<u>Παράδειγμα:</u> $\boxed{505}$ Έστω $z \in \mathbb{C}$ και $\gamma : [a, \beta] \to \mathbb{C}$ κ.τ. C^1. Τότε:

α) $n \in \mathbb{N}$ $\quad \displaystyle\int_\gamma (\zeta - z)^n d\zeta = \frac{1}{n+1}\left(\gamma(\beta) - z\right)^{n+1} - \frac{1}{n+1}\left(\gamma(a) - z\right)^{n+1}$

β) $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ και $\gamma([a,\beta]) \subset \mathbb{C} \setminus \{z\}$

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^n} = \frac{1}{n-1} \frac{1}{(\gamma(a) - z)^{n-1}} - \frac{1}{n-1} \frac{1}{(\gamma(\beta) - z)^{n-1}}$$

γ) $\gamma([a,\beta]) \subset z + \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$: $\displaystyle\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \log(\gamma(\beta) - z) - \log(\gamma(a) - z)$

<u>Δείκτης στροφής κλειστής καμπύλης</u>

Έστω $\gamma : [a, \beta] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ μια απλή κλειστή κ.τ. C^1 καμπύλη, δηλ.

$\gamma|_{[a,\beta)}$ είναι 1-1

που περιέχει το 0 στο εσωτερικό της

<u>Θεώρημα Jordan:</u> Κάθε συνεχής κλειστή καμπύλη στο $\mathbb{C}$ διαχωρίζει σε δύο συνεκτικές συνιστώσες και ταυτόχρονα η μία είναι φραγμένη και ονομάζεται εσωτερικό της καμπύλης.

Ειδικότερα, έστω ότι γ έχει μαθηματικά θετικό προσανατολισμό που τέμνει τον αρνητικό ημι-άξονα των πραγματικών, $\mathbb{R}^-$, μόνο μια φορά με αρχικό και τελικό σημείο στο $\mathbb{R}^-$, δηλ. $\gamma(a) = \gamma(\beta) = x < 0$.

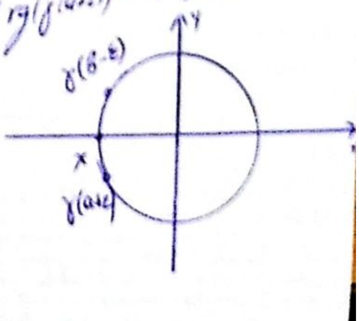
Τότε υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ με $\varepsilon_0 < \frac{\beta - a}{2}$ έτσι ώστε $\forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$: $\gamma(a+\varepsilon), \gamma(\beta - \varepsilon) \in D\left(x, \frac{|x|}{2}\right)$, $Im\, \gamma(a+\varepsilon) < 0$, $Im\, \gamma(\beta - \varepsilon) > 0$.

Τότε, (βλ. παράδειγμα (γ)) έχουμε:

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{\gamma|_{[a, a+\varepsilon]}} \frac{d\zeta}{\zeta} + \underbrace{\int_{\gamma|_{[a+\varepsilon, \beta-\varepsilon]}} \frac{d\zeta}{\zeta}}_{= \log(\gamma(\beta-\varepsilon)) - \log(\gamma(a+\varepsilon))} + \int_{\gamma|_{[\beta-\varepsilon, \beta]}} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

$\log(\gamma(a+\varepsilon)) = \ln|\gamma(a+\varepsilon)| + i\, Arg(\gamma(a+\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \ln|x| - i\pi$

$\log(\gamma(\beta-\varepsilon)) = \ln|\gamma(\beta - \varepsilon)| + i\, Arg(\gamma(\beta-\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \ln|x| + i\pi$



Πέμπτη 09/05/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 2η ώρα

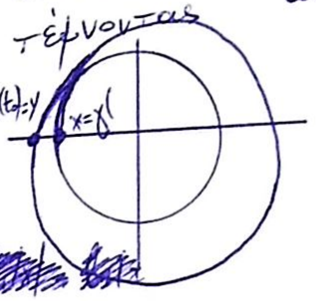
Άρα $\log(\gamma(b-\varepsilon)) - \log(\gamma(a+\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \ln|x| + i\pi - (\ln|x| - i\pi) = 2i\pi$

Επίσης, $\left|\int_{\gamma|[a,a+\varepsilon]} \frac{d\zeta}{\zeta}\right| \cdot \left|\int_{\gamma|[b-\varepsilon,b]} \frac{d\zeta}{\zeta}\right| \underset{\text{τριγ. ανισ.}}{\le} \max_{\substack{t\in[a,a+\varepsilon] \\ t\in[b-\varepsilon,b]}} \left|\frac{1}{\gamma(t)}\right| \int_{[a,a+\varepsilon]} |\gamma'(t)|\,dt \le$

$$\le \frac{2\cdot \max_{t\in[a,b]} |\gamma'(t)|\cdot\varepsilon}{c\cdot|x|} \to 0$$

Συνεπώς, για την πιο πάνω καμπύλη, έχουμε: $\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i$.

Ειδικότερα, αυτό ισχύει για κάθε θετικά προσανατολισμένο κύκλο $\gamma(t) = r\cdot e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$, $r>0$ (το οποίο επιβεβαιώνεται και αν υπολογίσουμε με τον ορισμό το ολοκλήρωμα αυτό)

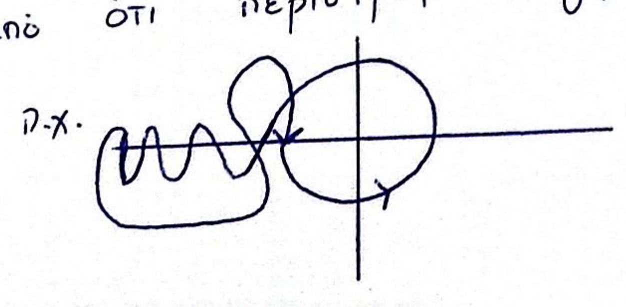
Αν, τώρα, πάρουμε μια καμπύλη η οποία περιστρέφεται δύο φορές γύρω από το μηδέν τέμνοντας ακριβώς δύο φορές τον αρνητικό ημιάξονα (π.χ. 

) τότε:

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{\gamma|[\,,t_0]} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{\gamma|[t_0,b]} \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln|y| - \ln|x| + 2\pi i + \ln|x| - \ln|y| + 2\pi i = 4\pi i$$

Γενικά, μια καμπύλη κλειστή κ.τ. C^1 που περιστρέφεται γύρω από το 0 κατά τη θετική φορά τέμνοντας τον αρνητικό ημιάξονα των πραγματικών n φορές ισχύει: $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = n$, ενώ αν περιστρέφεται κατά τη αρνητική φορά: $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = -n$

<u>Παρατήρηση</u>: Μια καμπύλη μπορεί να τέμνει τον $\mathbb{R}^-$ περισσότερες φορές από ότι περιστρέφεται γύρω από το μηδέν

π.χ. 

Αυτό οφείλεται στο εξής φαινόμενο: $\int_{[x-i\varepsilon,\, x+i\varepsilon]} \frac{d\zeta}{\zeta} = ?$, $\varepsilon>0$, $x<0$.

Παρασκευή 10/05/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 1η ώρα

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i = \int_{\partial D(0,r)} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

<u>Συμβολισμός:</u> Όταν θα γράφουμε $\partial D(0,r) = \{re^{it} : t\in[0,2\pi]\}$ $\left(= \{re^{it} : t\in[0,2\pi]\} = \{re^{\pm it} : t\in[0,T]\},\ T\geq 2\pi\right)$ δηλ. την εικόνα ενός παραμετρικοποιημένου κύκλου θα εννοούμε (σύμβαση) ότι $\int_{\partial D(0,r)} f(\zeta)d\zeta := \int_\gamma f(\zeta)d\zeta$ με

$\gamma(t) = re^{it},\ t\in[0,2\pi]$.

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ μια κλειστή κ.τ. C^1 καμπύλη. Τότε, ο δείκτης στροφής της γ γύρω από το 0:

$$\delta_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} \in \mathbb{Z}$$

είναι δηλαδή ακέραιος αριθμός.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $\gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_k$, με γ_i τα C^1 κομμάτια της γ,

$\gamma_i = \gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$, $i=1,\dots,k$. Για $t\in[a,b]$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\phi(t) = \exp\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}ds\right) = \exp\left(\sum_{j=1}^{i-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}ds + \int_{t_{i-1}}^{t}\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}ds\right) \Rightarrow$$

Αφού $\phi'(t) = \phi(t)\dfrac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \phi'(t)\gamma(t) = \phi(t)\gamma'(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\phi(t)}{\gamma(t)}\right) = \frac{\phi'(t)\gamma(t) - \phi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t))^2} = 0 \Rightarrow \frac{\phi(a)}{\gamma(a)}\left(= \frac{\phi(t_0)}{\gamma(t_0)} = \dots = \frac{\phi(t_n)}{\gamma(t_n)}\right) = \frac{\phi(b)}{\gamma(b)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi(a) = \phi(b) = \exp\left(\int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}ds\right) \Leftrightarrow e^a = 1 \Leftrightarrow a = 2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}dt = 2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$$

Όλα αυτά γενικεύονται για καμπύλες περιστρέφονται ή όχι γύρω από οποιοδήποτε σημείο δηλ. έστω $z\in\mathbb{C}$, $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}\setminus\{z\}$ κλειστή κ.τ. C^1. Τότε η $\tilde\gamma = \gamma - z : [a,b] \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ είναι επίσης κλειστή κ.τ. C^1 και ισχύει

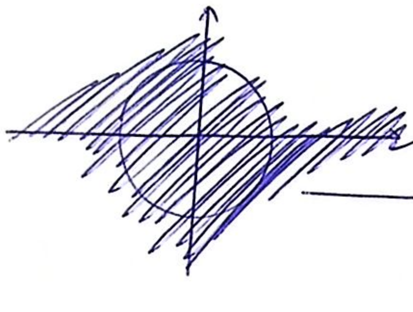
$$\int_{\tilde\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_a^b \frac{\tilde\gamma'(t)}{\tilde\gamma(t)}dt = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt = \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

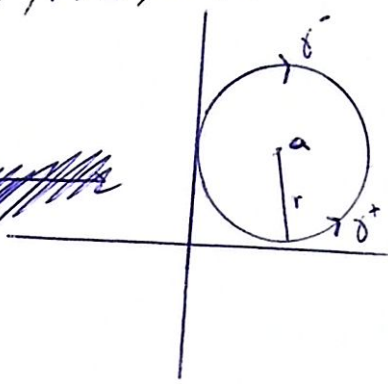
Ορισμός: Έστω $z \in \mathbb{C}$ και $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C} \setminus \{z\}$ κλειστή κ.τ. C^1. Τότε ο ακέραιος αριθμός $\delta_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \in \mathbb{Z}$ ονομάζεται δείκτης στροφής της γ γύρω από το z.

Παράδειγμα: Αν $\gamma_\pm(t) = a + re^{\pm it}$, $t \in [0, 2\pi n]$, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Τότε:

$$\int_{\gamma^\pm} \frac{d\zeta}{\zeta - a} = \pm 2\pi i n$$





Ορισμός: Αν $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ δοσμένη κ.τ. C^1 κλειστή, τότε ορίζεται η συνάρτηση του δείκτη στροφής της γ:

$$\delta_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha, \beta])$$

Γενίκευση Θεωρήματος Jordan (χωρίς απόδειξη)

Κάθε κλειστή καμπύλη διαχωρίζει το $\mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha, \beta])$ στις συνεκτικές συνιστώσες του (δηλ. συνεκτικά μη επεκτάσιμους τόπους) εκ των οποίων μόνο μια είναι μη φραγμένη.

Θεώρημα: Έστω $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ κλειστή κ.τ. C^1. Τότε η συνάρτηση του δείκτη στροφής $\delta_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha, \beta]) \to \mathbb{Z}$ είναι συνεχής, σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha, \beta])$ και ταυτοτικά μηδέν στη μη φραγμένη.

Παρασκευή 10/05/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 2η ώρα

Απόδειξη: $z, z_n \in \mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$ και $z_n \to z \Rightarrow \exists\, \varepsilon>0 : D(z,\varepsilon)\subset \mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$ και $n_0\in\mathbb{N}$ με $z_n \in D(z, \varepsilon/2)$ $\forall\, n\geq n_0 \Rightarrow \forall\, \zeta\in\gamma([a,b])$

$$\left|\frac{1}{\zeta-z_n}-\frac{1}{\zeta-z}\right| = \frac{|z_n-z|}{|\zeta-z_n|\,|\zeta-z|} \leq \frac{2}{\varepsilon^2}|z_n-z| \to 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ η ακολ. συναρ. $f_n(\zeta)=\frac{1}{\zeta-z}$, $\zeta\in\gamma([a,b])$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(\zeta)=\frac{1}{\zeta-z}$, $\zeta\in\gamma([a,b])$

$\Big[\, D(z,\varepsilon)\subset\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b]) \xRightarrow{\zeta\in\gamma([a,b])} |\zeta-z|\geq\varepsilon$ και $|\zeta-z_n|\geq|\zeta-z|-|z-z_n|> \varepsilon-\varepsilon/2>\varepsilon/2 \,\Big]$

$\Big[\, \|f_n-f\|_{L^\infty(\gamma([a,b]))} = \sup_{z\in\gamma([a,b])}|f_n(\zeta)-f(\zeta)| \leq \frac{2}{\varepsilon^2}|z_n-z|\to 0 \,\Big]$

$$\Rightarrow |\delta_\gamma(z_n)-\delta_\gamma(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma f_n(\zeta)d\zeta - \int_\gamma f(\zeta)d\zeta\right| \leq \frac{1}{2\pi}\|f^n-f\|_{L^\infty(\gamma([a,b]))}\cdot L(\gamma) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Αφού η δ_γ είναι συνεχής και παίρνει μόνο ακέραιες τιμές θα είναι σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα (αφού συνεχής εικόνα συνεκτικού συνόλου είναι συνεκτική)

$\Rightarrow$ Αυτό ισχύει και για τη μη-φραγμένη συνεκτ. συνιστώσα η οποία περιλαμβάνει το σύνολο $\mathbb{C}\setminus\bar{D}(a,r)$, $r>0$ με $\gamma([a,b])\subset D(a,r)$ [αφού $[a,b]\subset\mathbb{R}$ συμπαγές, $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ συνεχής $\Rightarrow$ $\gamma([a,b])\subset\mathbb{C}$ συμπαγές]

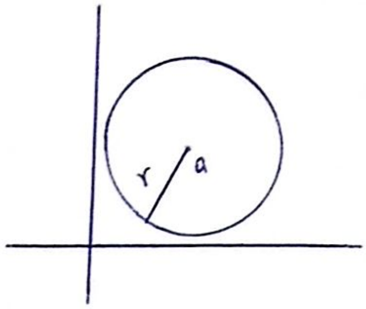
Έστω $(z_n)\subset\mathbb{C}\setminus\bar{D}(a,r)$ με $z_n\to\infty$. Τότε, αφού $|z_n-\zeta|\geq|z_n|-|\zeta|\geq|z_n|-r$ προκύπτει για τις $f_n(\zeta)=\frac{1}{\zeta-z_n}$, $\zeta\in\gamma([a,b])$, $\|f_n\|_{L^\infty(\gamma([a,b]))}\leq\frac{1}{|z_n|-r}\to 0$ $\forall\, \zeta\in\gamma([a,b]) \Rightarrow$ η $f_n:\gamma([a,b])\to\mathbb{C}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδ. συναρτ. για $z_n\to\infty \Rightarrow |\delta_\gamma(z_n)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma f_n(\zeta)d\zeta\right| \leq \frac{1}{2\pi}\|f_n\|_{L^\infty(\gamma([a,b]))}L(\gamma) \xrightarrow[z_n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \lim_{z\to\infty}\delta_\gamma(z)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{\delta_\gamma(z)=0 \quad \forall\, z\in \text{μη φραγμένη συνεκτ. συνιστώσα}}$

σε όλο το $\mathbb{C}\setminus\bar{D}(a,r)$ η δ_γ έχει μια σταθερή ακέραια τιμή

Παράδειγμα: $\boxed{\text{SOSAPA}}$ (βλ. Α.69)

$$\delta_{\partial D(a,r)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} 1, & z\in D(a,r) \\ 0, & z \in \mathbb{C}\setminus \overline{D}(a,r)\end{cases}$$



[για $a=z$ αυτό το έχουμε δει. Εδώ το point είναι $z\neq a$!], όπου $\partial D(a,r)$ θεωρείται θετικά προσανατολισμένος

Απόδειξη: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, $z\in D(0,1) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n = \frac{\zeta-a}{\zeta-z} = \frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}$, $z\in D(a,r)$, $\zeta\in\partial D(a,r)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}} = \frac{z-a}{z-\zeta}, \quad \underset{|z-a|>r}{\overset{\Leftrightarrow}{z\in \mathbb{C}\setminus\overline{D}(a,r)}}, \quad \underset{|\zeta-a|=r}{\overset{\Leftrightarrow}{\zeta\in\partial D(a,r)}}$$

όπου η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη ως προς $\zeta\in\partial D(a,r)$ σύμφωνα με το Κριτήριο Weierstrass αφού

$\max_{\zeta\in\partial D(a,r)} \frac{|z-a|}{|\zeta-a|} = \frac{|z-a|}{r} < 1$, $z\in D(a,r)$; $\max_{\zeta\in\partial D(a,r)} \frac{|\zeta-a|}{|z-a|} = \frac{r}{|z-a|}<1$, $z\in\mathbb{C}\setminus\overline{D}(a,r)$

[επειδή οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|z-a|}{r}\right)^n<\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{|z-a|}\right)^n<\infty$, αντίστοιχα]

Πρόταση: $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ μια C^1 καμπύλη, $f_n:\gamma([a,b])\to\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$ συνεχείς και $f:\gamma([a,b])\to\mathbb{C}$ με $f_n\to f$ ομοιόμορφα $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_\gamma f_n(\zeta)d\zeta \to \int_\gamma f(\zeta)d\zeta$

Απόδειξη: f συνεχής και $\left|\int_\gamma (f_n(\zeta)-f(\zeta))d\zeta\right| \le L(\gamma)|f_n-f|\to 0$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n \int_{\partial D(a,r)} \frac{d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} = \int_{\partial D(a,r)}\frac{d\zeta}{\zeta-z}, \quad z\in D(a,r),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \int_{\partial D(a,r)} (\zeta-a)^n d\zeta = -\int_{\partial D(a,r)} \frac{d\zeta}{\zeta-z}, \quad z\in\mathbb{C}\setminus\overline{D}(a,r)$$

$\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}} = \frac{1}{z-\zeta} = -\frac{1}{\zeta-z}\right]$, $\left[\text{Αντίστοιχα}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} = \frac{1}{\zeta-z}\right]$, $\left[\int_{\partial D(a,r)} \frac{d\zeta}{\zeta-a}=2\pi i\right]$

και αφού $\int_{\partial D(a,r)} (\zeta-a)^n d\zeta = \begin{cases} 0, & n\neq -1 \\ 1, & n=1\end{cases}$

Παρασκευή 10/05/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 3η ώρα

Αποτέλεσμα $2\pi i = \int_{\partial D(a,r)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$, $z \in D(a,r)$

$0 = \int_{\partial D(a,r)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(a,r)$

Λήμμα: (Ολοκλ. λήμμα Goursat)

Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $p \in \mathbb{C}$, $f: D \to \mathbb{C}$ συνεχής και στο $D \setminus \{p\}$ ολόμορφη

Τότε $\int_{\partial \Delta} f(z)dz = 0$ για κάθε συμπαγές τρίγωνο $\Delta \subset D$

Απόδειξη: (1) Έστω ένα συμπαγές τρίγωνο $\Delta \subset D \setminus \{p\}$

$\Delta[a,b,c] = \{ z \in \mathbb{C} : z = a + s(b-a) + t(c-a) : s,t \geq 0, s+t \leq 1 \}$

$\partial \Delta = [a,b] \oplus [b,c] \oplus [c,a]$

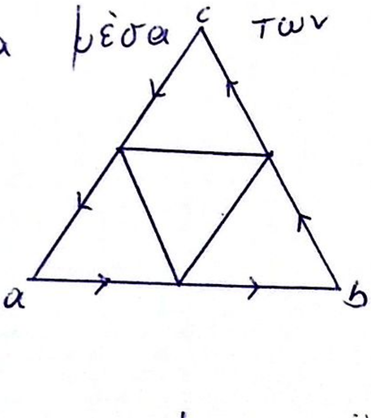
διάμετρος τριγώνου Δ

$\operatorname{diam} \Delta = \sup_{z,w \in \Delta} |z-w| \leq L(\partial \Delta) = |a-b| + |b-c| + |c-a|$

[για $z_i = a + s_i(b-a) + t_i(c-a)$, $i = 1,2 \Rightarrow |z_1 - z_2| \leq |s_1 - s_2||b-a| + |t_1 - t_2||c-a| \leq$

$\leq |b-a| + |c-a| \leq L(\partial \Delta)$]

Έστω Δ' τα 4 ίσα υποτρίγωνα που σχημ. κάνοντας με ευθ. τμ. τα μέσα των 3 πλευρών των Δ.



Τότε $L(\partial \Delta') = \frac{1}{2} L(\partial \Delta)$

Έστω συμβολισμός $a(\Delta) = \int_{\partial \Delta} f(\zeta) d\zeta$

Τότε $a(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} a(\Delta_i)$, αν διατρέξουμε τα $\Delta_1, \dots, \Delta_4$ κατά την ίδια θετική φορά.

Από τα 4 υποτρίγωνα, έστω Δ^1 για το οποίο η τιμή $|a(\Delta^1)|$ είναι η μεγαλύτερα από τις 4 τιμές για τα υποτρίγωνα. Τότε $|a(\Delta)| \leq 4|a(\Delta^1)|$. Τα ίδια για το Δ^1. Τότε προκύπτει υποτρίγωνο $\Delta^2 \subset \Delta^1 \subset \Delta$ έτσι ώστε: $|a(\Delta)| \leq 4|a(\Delta^1)| \leq 4^2 |a(\Delta^2)|$

Συνεχίζοντας έτσι, (Επαγωγικά) προκύπτει «φθίνουσα» ακολουθία συμπαγών τριγώνων $\Delta \supset \Delta^1 \supset \Delta^2 \supset \dots$ (0) με

$$|a(\Delta)| \leq 4^n |a(\Delta^n)| \quad (1)$$

$$\operatorname{diam}(\Delta^n) \leq L(\partial \Delta^n) = \frac{1}{2^n} L(\partial \Delta) \quad (2)$$

$\Rightarrow$ Αφού τα τρίγωνα είναι μη κενά και κλειστά και το $\mathbb{C}$ πλήρες από τις (0), (1), (2) ότι υπάρχει $c \in \Delta$ με

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^n = \{c\} \quad (3)$$

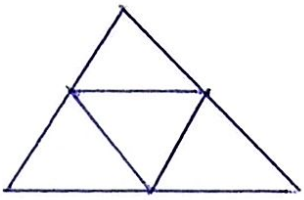
Πέμπτη 16/05/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 1η ώρα

<u>Ολοκληρωτικό λήμμα Goursat</u>

$D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $p \in \mathbb{C}$, $f: D \to \mathbb{C}$ συνεχής, ολόμορφη στο $D \setminus \{p\} \Rightarrow \int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$

$\forall$ συμπαγές τρίγωνο Δ (1)

<u>Απόδειξη (1)</u>: $\Delta \subset D \setminus \{p\}$



Διαμερίζουμε το Δ ενώνοντας τα μέσα των τριών πλευρών του $\Rightarrow$ προκύπτουν 4 υποτρίγωνα Δ' με $L(\partial\Delta') = \frac{1}{2} L(\partial\Delta)$

$a(\Delta) = \int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta = \sum_{i=1}^{4} a(\Delta_i) \Rightarrow |a(\Delta)| \leq 4|a(\Delta')|$

(μέχρι εδώ προηγ. μάθ)

$f: D\setminus\{p\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη $\Rightarrow \exists\ g: D\setminus\{p\} \to \mathbb{C}$ συνεχή με $g(c) = 0$ και

$f(z) = f(c) + f'(c)(z-c) + (z-c)g(z) \quad \forall z \in D\setminus\{p\}$

Θέτω $g(z) = \dfrac{f(z) - f(c)}{z-c} - f'(c) \quad \forall z \in D \setminus\{p, c\}$, $g(c) = 0$

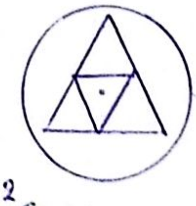
Αφού $\int_{\partial\Delta^n} f(c)dz = 0$, $\int_{\partial\Delta^n} f'(c)(z-c)dz = 0$ [αφού είναι ολ. η $h_1(z) = f(c)$, $h_2(z) = f'(c)(z-c)$ ολοκληρώσιμες, δηλ. έχουν αντιπαράγ. Θ. 5.2.1.

$\Rightarrow a(\Delta^n) = \int_{\partial\Delta^n} f(z)dz = \int_{\partial\Delta^n} (z-c)g(z)dz \Rightarrow |a(\Delta^n)| \leq \underbrace{\left(\max_{z \in \partial\Delta^n} |z-c||g(z)|\right)}_{\leq \|g\|_{L^\infty(\partial\Delta^n)} \underbrace{\operatorname{diam}\Delta^n}_{\leq L(\partial\Delta^n)}} \cdot L(\partial\Delta^n)$

$\leq L(\partial\Delta^n)^2 \|g\|_{L^\infty(\partial\Delta^n)} \Rightarrow |a(\Delta)| \leq 4^n L(\partial\Delta^n)^2 \|g\| = 4^n \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 L(\partial\Delta)^2 \|g\|_{L^\infty(\partial\Delta^n)}$

Όμως $g: D\setminus\{p\} \to \mathbb{C}$ συνεχής με $g(c) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall z \in D(c,\delta): |g(z)| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : \|g\|_{L^\infty(\bar{D}(c,\delta))} < \varepsilon$

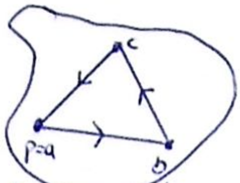


Συνεπώς, έστω $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$ $\Delta^n \subset D(c,\delta) \Rightarrow \forall n \geq n_0$ $\|g\|_{L^\infty(\partial\Delta^n)} \leq \|g\|_{L^\infty(\Delta^n)} \leq$

$\leq \|g\|_{L^\infty(\bar{D}(c,\delta))}$. Άρα $\forall \varepsilon > 0$: $|a(\Delta)| \leq L(\partial\Delta)^2 \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow a(\Delta) = 0$, το αποδεικτέο στην περίπτωση ①, δηλ. $p \notin \Delta$

2) Έστω p μια κορυφή του Δ



π.χ. $p=a$. Έστω $\xi \in [a,b]$, $\eta \in [a,c]$ με $0 < |a-\xi|, |a-\eta| < \varepsilon$

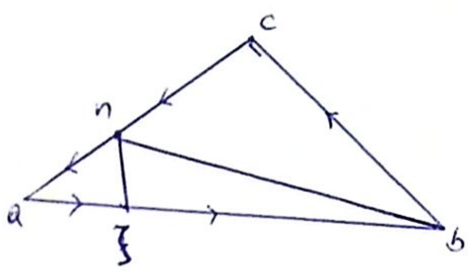
Διατρέχοντας τα σύνορα των $\Delta = \Delta[a,b,c]$, $\Delta_a := [a,\xi,\eta]$, $\Delta_b := [\eta,\xi,b]$, $\Delta_c := [\eta,b,c]$ (κατά τη θετ. κατ.) έχουμε

$$a(\Delta) = a(\Delta_a) + a(\Delta_b) + a(\Delta_c) = a(\Delta_a)$$

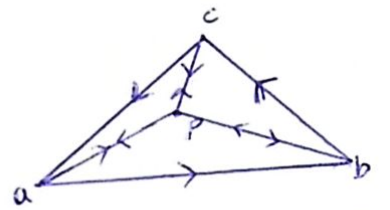
$$\Rightarrow |a(\Delta)| = |a(\Delta_a)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Delta_a)} L(\partial\Delta_a) \leq$$

$$\leq \|f\|_{L^\infty(\Delta)} (|\xi-a| + |\eta-a| + \underbrace{|\eta-\xi|}_{\leq |\eta-a|+|a-\xi|}) \leq$$

$$\leq \|f\|_{L^\infty(\Delta)} 2(|\xi-a| + |\eta-a|)$$



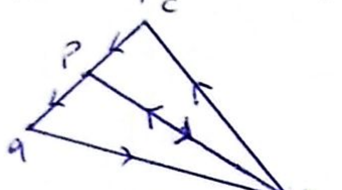
3) Έστω $p \in \mathring{\Delta}$.



$\Rightarrow$

$$\Rightarrow a(\Delta) = a(\Delta[p,a,b]) + a(\Delta[p,b,c]) + a(\Delta[p,c,a]) \stackrel{(2)}{=} 0$$

4) Έστω $p \in$ πλευρά του Δ χωρίς κορυφές



$$p \in [a,c] \setminus \{a,c\} \xRightarrow{(2)} a(\Delta) = 0$$

<u>Θεώρημα 5.4.1.</u> (Θεώρημα και γενικός τύπος Cauchy για αστερόμορφους τόπους)

Έστω $D \subset \mathbb{C}$ αστερόμορφος τόπος με κέντρο a και $f: D \to \mathbb{C}$ συνεχής και ολόμορφη στο $D \setminus \{p\}$, $p \in \mathbb{C}$. Τότε:

1) Η f είναι ολοκληρώσιμη έχει ως παράγουσα της $F(z) := \int_{[a,z]} f(\zeta)d\zeta$

2) $\forall$ κλειστή κ.τ. C^1 καμπύλη $K \subset D$: $\int_K f(\zeta)d\zeta = 0$

3) Αν $f: D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ κλειστή κ.τ. C^1 με $\gamma([a,b]) = K \subset D$, τότε ισχύει ο γενικός τύπος του Cauchy:

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i\, \delta_\gamma(z) f(z) \quad \forall z \in D \setminus K$$

Πέμπτη 16/05/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 2η ώρα

Απόδειξη (1)⇒(2): Ολοκλ. λήμμα Goursat + προηγ. προτ.

(3) Έστω $z \in D \setminus \gamma([a,b])$ σταθερό. Θεωρούμε την

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}, \quad \zeta \in D\setminus\{z\}, \quad g(z) := f'(z)$$

$\Rightarrow g: D \to \mathbb{C}$ συνεχής και ολόμορφη στο $D\setminus\{z\}$

$$\Rightarrow \quad 0 \overset{(2)}{=} \int_\gamma g(\zeta)\,d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - f(z)\underbrace{\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}}_{=2\pi i\, n_\gamma(z)}$$

ορισμός του δείκτη στροφής

Πόρισμα 5.4.1 (Τύπος Cauchy) SOS

Έστω $D\subset\mathbb{C}$ ανοικτό, $f: D\to\mathbb{C}$ ολόμορφη και $\overline{D}(a,r)\subset D$, $r>0$. Τότε

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad z\in D(a,r)}$$

όπου $\partial D(a,r)$ διατρέχει κατά τη θετική φορά

Απόδειξη: Αφού $D(a,r) \subset \overline{D}(a,r) \subset D$, $r>0$ προκύπτει (A.79) $r<R=\mathrm{dist}(a,\partial D)$

Θεωρόντας τον περιορισμό της f στο $D(a,r)\subset D$ και αφού αυτό το $D(a,R)$ είναι κυρτό ⇒ αστερόμορφο και ανοικτό εφαρμόζουμε τον γενικό τύπο του Cauchy για την καμπύλη $\partial D(a,r) \subset D(a,R)$

Παρατήρηση: Τύπος του Cauchy:

Η τιμή μιας ολόμορφης f σε ένα σημείο του z ενός ανοικτού δίσκου καθορίζεται μόνο από τις τιμές της συνάρτησης στο σύνορο του δίσκου και τη θέση του z στο δίσκο αυτόν

Δηλ. οι τιμές της f στον κύκλο καθορίζουν όλες τις τιμές στο εσωτερικό του

Πόρισμα 5.4.2 (Θεώρημα Μέσης Τιμής)

$D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $f: D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, $\bar{D}(a,r) \subset D$, $r > 0$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\phi}) \, d\phi$$

Παρασκευή 17/05/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 1η ώρα

$\boxed{\text{SUPER SOS}}$

<u>Θεώρημα:</u> (Αναπαράστασης Cauchy - Taylor - Αναλυτικότητα ολόμορφων συναρτήσεων)

Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : D \to \mathbb{C}$

f ολόμορφη $\Rightarrow$ f αναλυτική

Ειδικότερα, η f έχει ολόμορφες μιγ. παραγωγίσεις $f^{(k)} : D \to \mathbb{C}$ οσοδήποτε $k \in \mathbb{N}_0$, ισχύει $f \in C^{\infty}(D)$ [δηλ. άπειρες φορές πραγμ. διαφορίσιμη] και για κάθε $a \in D$ η f αναπτύσσεται σε σειρά Taylor γύρω από το a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \quad z \in D(a,R), \quad R = dist(a, \partial D)$$

όπου $$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta, \quad r \in (0,R)$$

και γενικότερα

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta, \quad z \in D(a,r), r \in (0,R) \quad (**)$$

<u>Απόδειξη:</u> [με επιχειρήματα που έχουμε ήδη δει $\to$ επανάληψη]

Έστω $a \in D$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό $\Rightarrow \exists\, r(a) > 0 : \overline{D}(a, r(a)) \subset D$.

Έστω $z \in D(a, r(a))$ και $\zeta \in \partial D(a, r(a)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{|z-a|}{|\zeta-a|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{\zeta-a}{z-a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}(z-a)^n = \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$$

Η σειρά αυτή συγκλίνει γιατί πολ/ζω των πάνω γεωμ. σειρά που συγκλίνει με έναν σταθερό αριθμό, άρα δεν επηρεάζεται η σύγκλιση

και μάλιστα η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $\partial D(a, r(a))$ (δηλ αν τα μερικά αθροίσματα ως συναρτήσεις του $\zeta \in \partial D(a, r(a))$) σύμφωνα με το κριτήριο του Weierstrass, αφού:

$$\max_{\zeta \in \partial D(a,r)} \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}(z-a)^n \right| \leq \frac{\|f\|_{L^\infty(\partial D(a,r(a)))}}{r(a)} \underbrace{\left(\frac{|z-a|}{r(a)}\right)}_{<1}^n$$

Συνεπώς, (βλ. Προτ. 5.3.1 γ κ.τ. C^1 $f_n : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ συνεχείς, $f_n \to f$ ομοιόμορφα $(f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}) \Rightarrow \int_\gamma f_n d\zeta \to \int_\gamma f d\zeta$ και με χρήση του τύπου Cauchy* προκύπτει:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(a)(z-a)^n \ (1), \ z \in D(a, r(a)) \text{ με } c_n(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r(a))} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \ (2), \ n \in \mathbb{N}_0$$

[* Τύπος Cauchy: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \ z \in D(a,r)$]

Άρα η f είναι αναλυτική. Από αυτό προκύπτουν οι ιδιότητες που έχει κάθε αναλυτική συνάρτηση (βλ. Θ. 4.2.2. και Πόρισμα 4.2.1). Ειδικότερα, $c_n(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \ n \in \mathbb{N}_0$ (3)

Αφού το μοναδικό κριτήριο επιλογής του $r(a) > 0$ στην προηγούμενη ανάλυση ήταν να ισχύει:
$\overline{D}(a, r(a)) \subset D$ και αφού $D(a, \underset{\operatorname{dist}(a,\partial D)}{R}) \subset D$, προκύπτει ότι για κάθε $z \in D(a,R)$ υπάρχει κάποιο $r \in (|z-a|, R)$ έτσι ώστε $z \in D(a,r) \subset \overline{D}(a,r) \subset D(a,R) \subset D$ για το οποίο ισχύει η (1) με τους συντελεστές (2), οι οποίοι λόγω της (3) είναι ανεξάρτητοι του $0 < r < R \Rightarrow (**) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \ z \in D(a,R)$$

Η προκύπτει από τη γενίκευση σε κάθε $k \in \mathbb{N}_0$ της μεθόδου που χρησιμ. για $k=0$ για να εξάγουμε την τελευταία ισότητα

[Συγκεκριμένα, Παράδειγμα 4.4.2:

$$\frac{1}{(\zeta-z)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{(\zeta-a)^{n+1}} (z-a)^{n-k} \Rightarrow \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} (z-a)^{n-k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=k}^{m} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} (z-a)^{n-k} \xRightarrow{\text{προτ. 5.3.1}} \int_{\partial D(a,r(a))} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} d\zeta = \lim_{m\to\infty} \int_{\partial D(a,r(a))} \sum_{n=k}^{m} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=k}^{m} \int \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} (z-a)^{n-k} \int_{\partial D(a,r(a))} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r(a))} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} d\zeta = \sum_{n=k}^{\infty} k! \binom{n}{k} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r(a))} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta}_{c_n(a)} (z-a)^{n-k} \frac{1}{(\zeta-z)^{k+1}} = \dots =$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} c_n(a)(z-a)^{n-k} \underset{4.30}{=} f^{(k)}(z) \Rightarrow f^{(k)}(z) = c_k(z) k!$$ και άρα το ολοκλ. στα αριστερά είναι ανεξ. του r

Παρασκευή 17/05/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 2η ώρα

<u>Εφαρμογές</u>: Α.73 Υπόδειξη: Υπάρχει ολοκληρωτικός τύπος για $f^{(n)}(0)$

Α.76.

<u>Λύση</u>

Θεώρ. Αναπ. Cauchy-Taylor: (**)

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta, \quad z\in D(a,r), \ r\in(0,R), \ R=\mathrm{dist}(a,\partial D) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|f^{(n)}(z)|}{n!} = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta\right|, \ z\in D(a,r), \ldots \le$$

$$\le \max_{\zeta\in\partial D(a,r)} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z|^{n+1}}\, L(\partial D(a,r)) \le \max_{\zeta\in\partial D(a,r)} \frac{\|f\|_{L^\infty(\partial D(a,r))}}{|\zeta-z|^{n+1}} =$$

$$\le \|f\| \max\frac{1}{\ldots} = \frac{1}{\min(\ldots)} = \frac{1}{(\ldots)^{n+1}}$$

$$\mathrm{dist}(z,\partial D(a,r)) = \inf\{|\zeta-z| : \zeta\in\partial D(a,r)\} = \min(\ldots)$$

<u>Θεώρημα Liouville</u>: Κάθε ακέραια και φραγμένη μιγαδική συνάρτηση είναι σταθερή.

<u>Απόδειξη</u>:

$$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C} \text{ ολόμορφη} \xrightarrow{\text{θ. αναπ. C-T}} f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n, \ z\in\mathbb{C} \Rightarrow$$

ανισ. Cauchy $\Rightarrow$ με $z=a=0$ και οποιοδήποτε $D(a,r)\subset\mathbb{C}, r>0$

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \le \frac{r\|f\|_{L^\infty(\partial D(0,r))}}{(\mathrm{dist}(0,\partial D(0,r)))^{n+1}} = \frac{r\|f\|_{L^\infty(\partial D(0,r))}}{r^{n+1}} \le \frac{a}{r^n} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \ \forall n$$

$$\Rightarrow \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}=0 \iff f^{(n)}(0)=0 \ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow f(z)=\frac{f^{(0)}(0)}{0!}z^0 = f(0)$$

$\forall z\in\mathbb{C}$.

<u>Πόρισμα</u>: Θεμελιώδες Θεώρημα Άλγεβρας [→ Άσκηση]

[redacted]

→ Αγαπημένο του Καρακώστα

Θεώρημα Morera: Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $f: D \to \mathbb{C}$ συνεχής και $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ για κάθε συμπαγές τρίγωνο $\Delta \subset D \Rightarrow f$ ολόμορφη

Απόδειξη: Έστω $a \in D$, $D(a,r) \subset D$, $r>0$. Η f είναι συνεχής στο $D(a,r)$
$D(a,r)$ κυρτό $\Rightarrow$ αστερόμορφο. Επίσης, $\forall\ \Delta = \Delta[a,b,c] \subset D(a,r)$
$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0 \xRightarrow[\text{για αστερ. τόπους}]{\text{κριτ. ολοκλ.}} \exists\ F: D(a,r) \to \mathbb{C}$ με $F' = f$ και άρα

F ολόμορφη $\Rightarrow F' = f$ ολόμορφη σύμφωνα με το θεώρημα 5.5.1 (Αναπ. C-T)

Θεώρημα 5.6.3 (Θεώρημα επέκτασης του Riemann)
Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $A \subset D$ διακριτό και κλειστό και $f: D \setminus A$ ολόμορφη.
Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

α) η f είναι ολόμορφα επεκτάσιμη πάνω από το A, δηλ. $\exists\ F: D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με $F|_{D\setminus A} = f$ συνεχής

β) η f είναι συνεχώς επεκτάσιμη πάνω από το A

γ) $\forall\ c \in A\ \exists$ περιοχή του c στην οποία η f είναι φραγμένη

δ) $\forall\ c \in A$: $\lim_{z \to c} (z-c) \cdot f(z) = 0$

Απόδειξη
$(\rightarrow)$ $(\alpha) \Rightarrow (\beta) \Rightarrow (\gamma) \Rightarrow (\delta)$
$(\leftarrow)$ $(\delta) \Rightarrow (\alpha)$: $A \subset \mathbb{C}$ διακριτό $\Leftrightarrow$ κάθε σημείο $c \in A$ είναι μεμονωμένο, δηλ. $\forall\ c \in A\ \exists$ περιοχή U του c: $A \cap U = \{c\}$
Άρα, έστω $c \in A$. Θεωρούμε τον περιορισμό της f στην τομή της U με το $D \setminus A$
δηλ. θα εξετάσουμε μόνο τι συμβαίνει στο c (θα θεωρήσουμε ότι το A έχει μόνο ένα σημείο). Το οποίο για γ.β.τ.γ. ας είναι το $c=0$

Παρασκευή 17/05/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 3η ώρα

Θεωρούμε $g(z) = z f(z)$, $z \in D \setminus \{0\}$, $g(0) = 0$, $h(z) = z g(z)$, $z \in D$
$\Rightarrow g: D \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής, $h: D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη (
$\left(h(z) = h(0) + z g(z) \ \forall z \in D \setminus \{0\}, \Leftrightarrow \frac{h(z) - h(0)}{z - 0} = g(z) \xrightarrow{z \to 0} 0 = h'(0) \right)$

Θεωρ. Αναπαρ. C-T: η h αναπτύσσεται σε σειρά Taylor γύρω από το 0, όπου $h(0) = h'(0) = 0 \Rightarrow h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, $z \in D(0,r)$ $= z^2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} z^n}_{= F(z)}$

και άρα $h(z) = z^2 f(z) \ \forall z \in D \setminus \{0\}$

Τρίτη 21/05/19 αναπλήρωση 10:00-12:00

Τρίτη 21/05/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 1η ώρα

Βλέπε παρατηρήσεις σελίδα 150

β) Αν δύο ολόμ. f, g ταυτίζεται σε ένα τόπο D σε μια συγκλίνουσα ακολουθία στο D με όριο στο D, τότε $f \equiv g$ σε όλο το D

δ) Θεώρημα Μοναδικότητας: Μια $f: D \to \mathbb{C}$, D τόπος καθορίζεται μοναδικά από τις τιμές της σε ένα πολύ λεπτό σύνολο μηδενικού μέτρου.

έστω f γνωστή μόνο στο (—)

Δηλ. έστω

Τότε υπάρχει το πολύ μια ολόμορφη επέκταση της f σε περιοχή του (—) στο $\mathbb{C}$.

Μεμονωμένες Ανωμαλίες

Ορισμός: $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό. Ένα σημείο $c \in D$ ονομάζεται μεμονωμένη ανωμαλία (isolated singularity) μιας f

αν η $f: D \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη.

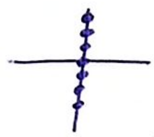
Μια μεμ. ανωμ. ονομάζεται επουσιώδης, αν η f είναι ολόμορφα επεκτάσιμη πάνω από το $\mathbb{C}$.

Παρατήρηση $\boxed{SOS}$ (Βλέπε Θεώρημα Επέκτασης Riemann)

Για ισοδύναμους χαρακτηρισμούς με $A=\{c\}$, α.χ. μια μεμ. αν. είναι επουσιώδης, αν η f είναι φραγμένη σε περιοχή του c έχει επουσιώδη ανωμαλία.

Παράδειγμα: 1) Η $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z-1}$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο $z=1$ $\left[\ \forall z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}: f(z)=\dfrac{(z-1)(z+1)}{z-1}=z+1\xrightarrow[z\to 1]{}2\right.$

Δηλ. η $f: D\setminus\{1\}\to\mathbb{C}$ είναι επεκτάσιμη συνεχώς (πάνω από το $\{1\}$) στην $F(z)=\begin{cases} f(z), & z\neq 1\\ 2, & z=1\end{cases}$

2) Η $g(z)=\dfrac{z}{e^z-1}$ έχει στο $z=0$ επουσιώδη ανωμ. $\left[\right.$ όλες οι μεμονωμένες ανωμαλίες είναι οι $z_k=2k\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$ αφού $e^z=1 \iff z=2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$  $\left.\right]$

Θεωρούμε την $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z}$ $\left(=\dfrac{1}{g(z)}\right.$, όπου ορίζεται και είναι $\neq 0$), $z\neq 0$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}-1}{z}=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}$$

Άρα $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{(n+1)!}$, $z\neq 0$ [δηλ. η σειρά $\forall z\neq 0 \xRightarrow[\text{σύγκλιση δ.σ.}]{\text{Πρόταση για}}$ η σειρά συγκλίνει $\forall z\in\mathbb{C}$]

$\Rightarrow$ Η $f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ επεκτείνεται στην $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{(n+1)!}$, $z\in\mathbb{C}$ η οποία ως δ.σ. είναι ολόμορφη σε όλο το δίσκο σύγκλισης της (εδώ $\mathbb{C}$)

$\Rightarrow$ η F είναι συνεχής $\Rightarrow F(0)=1$

Άρα η $g(z)=\dfrac{z}{e^z-1}=\dfrac{1}{F(z)}$ $\forall z\in D(0,\varepsilon)\setminus\{0\}$, $\varepsilon>0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ η g επεκτείνεται συνεχώς πάνω από το $z_0=0$ και είναι ολόμορφη στο $D(0,\varepsilon)$ (Θ.Ε.R.)

Τρίτη 21/05/19 Μιγαδικές Συναρτήσεις 2η ώρα

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση (επουσιώδης $\Rightarrow f$ φραγμένο σε περιοχή) αν μια μεμ. αν. δεν είναι επουσιώδης, θα είναι η f μη φραγμένη σε κάθε περιοχή U του c (καλύτερα $f|_{U\setminus\{c\}}$ μη φραγμένη $\forall\, U$ περιοχή του c)

π.χ. $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$

Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $c \in D$, $f: D\setminus\{c\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Το c ονομάζεται πόλος της f αν $\exists\; m := \min\{n \in \mathbb{N} : \text{η } (z-c)^n f(z)$ είναι φραγμένη γύρω από το $c\}$.

Το m ονομάζεται τάξη του πόλου και για $m=1$ ο πόλος ονομάζεται απλός.

π.χ. το $c=0$ είναι απλός πόλος της $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$

<u>Παράδειγμα</u>: Η $f(z) = \frac{1}{(z-c)^m}$, $m \in \mathbb{N}$, $z \neq c$, έχει πόλο τάξης m στο c.

<u>Κριτήρια για πόλους</u>: Πρόταση 5.7.1

<u>Πόρισμα 5.7.1</u>: $\boxed{\text{SOS}}$ Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $c \in D$, $f: D\setminus\{c\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Τότε η f έχει πόλο στο $c \iff \lim_{z\to c} f(z) = \infty$

<u>Ορισμός</u>: Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $c \in D$. Το c ονομάζεται ουσιώδης ανωμαλία (essential singularity) αν το c δεν είναι ούτε επουσιώδης ανωμαλία, ούτε πόλος.

<u>Παρατήρηση</u>: Σύμφωνα με τα προηγούμενα, αν το c είναι ουσιώδης ανωμαλία, τότε: 1) όλες οι $(z-c)^m f(z)$, $z \in D\setminus\{c\}$, $m \in \mathbb{N}_0$, είναι μη φραγμένες γύρω από το c και 2) $\exists$ τουλ. μια ακολουθία $(z_n) \subset D\setminus\{c\}$ με $z_n \to c$ και $f(z_n) \to a \in \mathbb{C}$ [Το (1) προφ., το (2) Bolzano Weierstrass]

Θεώρημα Casorati-Weierstrass:

α) f έχει ουσιώδη ανωμαλία $\iff$

β) $\forall\, U \subset D$ περιοχή του c $f(U \setminus \{c\})$ πυκνή στο $\mathbb{C}$ $\iff$

γ) $\exists\, (z_n) \subset D \setminus \{c\}$ με $z_n \to c$ και $f(z_n)$ δε συγκλίνει στο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Παράδειγμα: Η $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ έχει ουσιώδη ανωμαλία στο c.

Απόδειξη: Με Casorati-Weierstrass.

$z_n = \frac{1}{\pi i n} \to 0$, $\frac{1}{z_n} = i\pi n \Rightarrow f(z_n) = e^{i\pi n} = \cos(\pi n) + i\,\cancel{\sin(\pi n)}^{0} =$

$= (-1)^n$ δε συγκλίνει

Παρατήρηση: $\tilde{z}_n = \frac{1}{2\pi i n} \to 0$, $f(\tilde{z}_n) = e^{2i\pi n} = 1 \to 1 \in \mathbb{C}$

Ορισμός: Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό. Μια μιγαδική συνάρτηση f ονομάζεται μερόμορφη στο D αν υπάρχει δ. διακριτό υποσύνολο $P(f) \subset D$: η $f: D \setminus P(f) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και $\forall\, c \in P(f)$ πόλος.

Παράδειγμα: Όλες οι ρητές είναι μερόμορφες στο $\mathbb{C}$.

Να δω A.81